

المجلس الأعلى للغة العربية





اللانهاية في الرياضيات والفيزياء

تأليف نخبة من الباحثين :

- نوربرت فيردي
- جون بيير لوميني
- مارك لاشييز ري

ترجمة : أ.د. أبو بكر خالد سعد الله

منشورات المجلس 2010

المجلس الأعلى للغة العربية

اللانهاية
في
الرياضيات والفيزياء

تأليف نخبة من الباحثين :

- نوربرت فيردي
- جون بيير لوميني
- مارك لاشييزري

أ.د. أبو بكر خالد سعد الله
قسم الرياضيات
المدرسة العليا للأساتذة، القبة، الجزائر

منشورات المجلس 2010

عنـــــوان الكتــــاب: اللانهايـــــة في الرياضيات والفيزياء

- قياس الصفحة: 24/16 سم
- عدد الصفحات: 160 ص
- **الإيداع القانوني:** 3512 /2010
- **ردمك:** 978-9947-821-53-4

المجلس الأعلى للغة العربية

شارع فرنكلين روزفلت ـ الجزائر
ص.ب 575 **الجزائر ـ ديدوش مراد**
الهاتف: 25 / 021.23.07.24 **الفاكس:** 021.23.07.07

كتاب اللانهاية في الرياضيات والفيزياء

ينقسم العمل إلى قسمين، القسم الأول حول ترجمة القسم الأول لكتاب "اللانهاية في الرياضيات" للمؤلف نوربرت فيردي Norbert Verdier، متطرقا إلى :

- اللانهاية عند الإغريق؛
- نحو نظرية للامتناهي الصغر؛
- نظرية رياضياتية للانهاية.

القسم الثاني حول ترجمة القسم الأول لكتاب "الفيزياء واللانهاية" للمؤلفين : جون ـ بير لوميني J-P.Luminet ومارك لاشيز ـ ري M.Lachieze-Rey متطرقا إلى :

- لا نهاية السماء؛
- لا نهاية المادة؛
- لا نهاية الثقب.

للكتاب أهمية في إثراء اللغة العربية بمصطلحات ومدلولات تساعد القائمين على التربية والتعليم في الاستفادة من هذا العمل العلمي.

هذا الكتاب من ترجمة الأستاذ الدكتور أبي بكر خالد سعد الله وهو من مواليد 1949 بولاية الوادي.

الوظيفة : أستاذ الرياضيات بالمدرسة العليا للأساتذة بالقبة منذ 1977 إلى يومنا هذا.

الشهادات المحصل عليها :

- شهادة الدكتوراه في الرياضيات التطبيقية من جامعة نيس سنة 1976 بتقدير مشرف جدا ؛
- شهادة الدكتوراه في التحليل الرياضي من جامعة العلوم والتكنولوجيا هواري بومدين، سنة 1999 بتقدير مشرف جدا؛

مشاريع البحث :

- مترجم في المجاهد الثقافي، (1969-1971)؛ وعضو هيئة تحرير مجلة التربية وكاتب علمي في مجلة أنباء الجامعة (جامعة هواري بومدين) وعضو في عدة فرق بحث ولجان؛
- نائب رئيس الجمعية الجزائرية لتاريخ الرياضيات؛
- شارك في تنظيم عدة ملتقيات في تاريخ الرياضيات العربية.

استحقاقات وجوائز :

- مدوّن في السجل العالمي، مشاهير العلم والهندسة، **who's who in science and enginneering**
- مدون في السجل العالمي مشاهير العلم **who's who in the world**
- الجائزة الوطنية لأحسن باحث في الرياضيات سنة 1982؛
- جائزة الرياضيات في البحث العلمي لمدينة الجزائر سنة 2001؛

التأليف :

- الكتب المؤلفة (معظمها بالاشتراك مع آخرين) : ساهم في إنتاج العديد من الكتب العلمية ولا سيما في الرياضيات لمختلف المستويات التعليمية :

مجموع الأعداد، الجبر، الدوال الأسية واللوغاريتمية، الهندسة التحليلية، المرشد في الرياضيات، مجموعة من كتب تمارين الرياضيات (07 كتب)، معجم الرياضيات، (التعليم الثانوي)؛

التفاضلي، التحليل الرياضي، معجم الرياضيات، (بالعربية والفرنسية للتعليم العالي)؛

الرياضيات المسلّية، والرياضيات الترفيهية (تحت الطبع)؛ والمتسلسلات والتكاملات الموسعة (قيد الإعداد)؛ بالإضافة إلى عباقرة الرياضيات؛ عالم الرياضيات؛

كما ترجم العديد من الكتب العلمية إلى العربية.

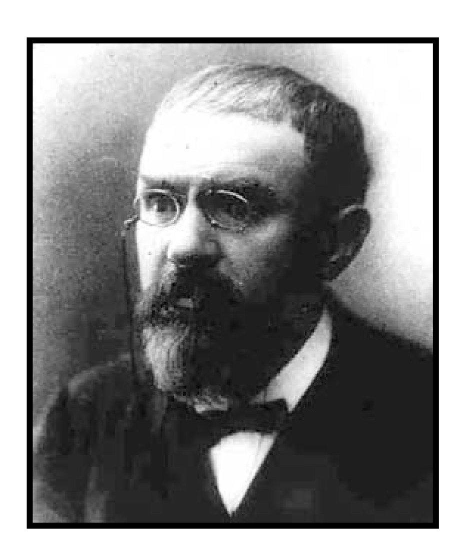
نال هذا العمل الجائزة الثانية في مجال الترجمة ضمن جائزة اللغة العربية التي نظمها المجلس الأعلى للغة العربية سنة 2010.

المحتوى

تقديم

«**الرياضيات هي علم اللانـهاية**»
الرياضياتي الألماني هرمن وايل
(1955-1885) Hermann Weyl

إذا ما تأملت في ما يقوم به الرياضياتيون خلال انشغالهم بالرياضيات فستلاحظ أن جل وقتهم يمضي في مقارنة الكائنات الرياضية المختلفة وترتيبها وتصنيفها. وهذا العمل لا يخلو في معظم الأوقات من تناول اللانهاية ... ألم يقل الريـاضياتي الشهير هنري بوانكري Henri Poincaré (1854–1912) إن "الاشتغال بالرياضيات هو رواية شيء ما عن اللانهاية"؟ !



هنري بوانكري Henri Poincaré (1854-1912)

ألا يظهر اللانهاية في الحساب : أكتب مثلا العدد العشري الممثل لـ $\sqrt{2}$ أو العدد π وستدرك ذلك. وفي المنطق، فقد ارتبط البرهان بالخلف في البداية بالبرهان على أن الأعداد $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$، ... ، $\sqrt{17}$، أعداد غير ناطقة. أما في الهندسة فيكفي أن نكتب مساحة قرص كنهاية لمساحة مضلع منتظم تحيط به دائرة القرص ويتزايد عدد أضلاعه لانهائيا. وفي التحليل الرياضي، فأنت لا تستطيع الحديث عن مفهوم الاستمرار أو الاشتقاق دون المرور باللانهاية. وفي الجبر : حاول مثلا تناول موضوع الفضاءات الشعاعية وخواصها دون ذكر اللانهاية.

هذا في الرياضيات، أما في الفيزياء فكل شيء نجد بداخله اللانهاية سواء كان لامتناهي الكبر أو لامتناهي الصغر. ويمكن أن نبحث عن اللانهاية في حقول أخرى متعددة لكن ذلك ليس موضوعنا هنا.

كان الرياضياتي البريطاني جون واليس John Wallis (1616-1703) قد أدخل رمز اللانهاية ∞ في القرن السابع عشر معتقدا أنه سيخلّص زملاءه من متاهات هذا المفهوم الغريب والخطير : غريب لأن العلماء لم يتمكنوا من تعريفه تعريفا دقيقا فظلوا يتجادلون بشأنه قرونا عديدة. وهو خطير لأنه تسبب في طرح العديد من المحيّرات في حقل الرياضيات أربكت في الماضي والحاضر كبار الرياضياتيين ... فلا نستغرب إذن إن قلنا إننا لازلنا إلى اليوم نكتشف لانهايات جديدة.



جون واليس John Wallis (1616-1703)

إن كلمة "لانهاية" لا تعني الكثير في الرياضيات إذا لم تلحق بمضاف أو تسبق بمبتدإ. فنحن نتكلم مثلا عن "المآل إلى لانهاية" وعن "المجموعة غير المنتهية" وعن "+ لانهاية"، الخ. والتأمل في اللانهاية جعل الرياضياتيين يميّزون بين نوعين من اللانهاية :

* النوع الأول : اللانهاية "الكامن" potentiel الذي يوحي بإمكانية "التجاوز" (مثل وجود عدد طبيعي يتجاوز أي عدد طبيعي معطى، أو وجود عدد أولي يتجاوز أي عدد أولي معلوم).

* النوع الثاني : اللانهاية "الفاعل" actuel الذي يتطلب منا إدراك جميع العناصر المنتمية إلى مجموعة غير منتهية، وهذا الإدراك لكافة تلك العناصر ينبغي أن يتم في آن واحد (مثل إدراك مجموعة الأعداد الطبيعية). وكان استخدام اللانهاية الفاعل قد حورب خلال مدة طويلة إلى أن برزت نظرية المجموعات ووضعت أسسها.

لنتعرف بإيجاز على بعض الجوانب المرتبطة بهذا المفهوم المتعدد الوجوه والذي حيّر جميع العلماء من فلاسفة ومفكرين ورياضياتيين وفيزيائيين ورجال دين.

لم يتقبّل رجال العلم في سابق العصور مفهوم اللانهاية بسهولة، بل ظلوا يأملون خلال مدة طويلة في التمكّن من الاستغناء عنه. وكان الرياضياتيون والفلاسفة ورجال الدين يتجادلون حول اللانهاية منذ أزيد من ألفي سنة. ومن بين الأسئلة التي كانت مطروحة في غابر العصور السؤال الفلسفي التالي : هل يعقل ألا يكون "الكل أكبر من الجزء"؟

إننا لا نتصوّر بأننا سوف نتخلى عن هذه الحقيقة الصارخة "الكلّ أكبر من الجزء". فنحن نخشى ألا يتمكّن فكرنا من مقاومة محاولة الرجوع إلى ذلك المبدإ الواضح البيّن. يبدو أن التشكيك في "مبدإ الكل والجزء" جرأة لا يقبلها العقل. ولهذا فضّل البعض الرأي القائل : من يحقّ له التفكير في اللانهاية لا بد أن

يكون ذاته كائنا لانهائيا، مثل الله. وهكذا نجد الكنيسة قد عارضت كل محاولة يقوم بها الإنسان بغية التفكير في اللانهاية.

واعتبر القديس تومس داكان Thomas d'Aquin (1225-1274) كل من يفكّر في الإحاطة باللانهاية بأنه يدخل في مواجهة مع الطبيعة الوحيدة والمطلقة اللاتناهي، وهي "الله".



تومس داكان Thomas d'Aquin (1225-1274)

ولا غرو في ذلك إذ أن التأملات في اللانهاية خلال القرون الوسطى كانت جلها تحمل طابعا ماورائيا. لكن بعض تلك التأملات مثل تأملات جوهانس كبلر Johannes Kepler (1571-1630) قد ساعدت على تحضير المناخ لظهور الحساب اللامتناهي خلال القرن السابع عشر.



جوهانس كبلر Johannes Kepler (1571-1630)

ويبدو أن الإيطالي فرانشسكو بونافنتورا كفلييري Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647) هو أول من اتخذ موقفا عصريا من اللانهاية حيث اعتبر أن هناك قوانين يخضع لها اللانهاية تختلف عن تلك التي تسيّر الكائنات المنتهية.



فرانشسكو بونافنتورا كفلييري
(1647-1598) Francesco Bonaventura Cavalieri

ومن بين الصعوبات التي عرفها تطور اللانهاية هو مقارنة الجزء بالكل، ولم يتمكّن من تخطيها. وكان أرسطو Aristote (384 ق.م.-223 ق.م.) قد قام بأولى الأبحاث في هذا الموضوع. فكان يستعمل لفظ "أبيرون" apeiron الدال على ما لا حدود له، والكبير بشكل مفرط ... لكنه كان يعني أيضا "الكارثة". ثم جاء عهد صار فيه "اللانهاية" يعني فيه "الواحد" الذي يختص به خالق الكون.



أرسطو Aristote (384 ق.م.-223 ق.م.)

ورفض أرسطو اللانهاية "الفاعل" (أو أحد اللانهايات الفاعلة) أي ذلك اللانهاية الذي لا يقبل التجزئة. كيف يمكن لنفس الشيء أن يساوي عدة لانهايات؟ تلك هي صيغة من صيغ الأسئلة التي كانت تطرح. وكان أرسطو يرفض كل وجود مادي للانهاية، لكنه يعترف لهذا الكائن بوجود رياضي معيّن لأنه كان يرى من الضرورة اعتبار كميّات يتعاظم حجمها أكثر فأكثر : كل عدد طبيعي يتبعه عدد آخر، ولا وجود لنقطة أخيرة على المستقيم. وقد حاول الرياضياتيون الاكتفاء بهذا اللانهاية الكامن وبالرجوع إليه عند الحاجة تجنبا للانهاية الفاعل.

ولا يمكن في هذا السياق ألا نشير إلى المفكر والفيلسوف المسيحي جون فيلوبون Jean Philopon الذي ولد وعاش بالإسكندرية خلال القرن السادس

ميلادي. فهو يقول : "إن كان الكون بدون بداية فإن عدد الأشخاص الذين عاشوا حتى عهد سقراط عدد لامنته. وإذا ما أضفنا إلى ذلك العدد عدد الأشخاص الذين عاشوا من عهد سقراط إلى اليوم فإننا نحصل على كمية أكبر من اللانهاية.

كما أن هناك حالة أخرى حيّرت فيلوبون : عندما تدور الشمس دورة فإن القمر يقوم بـ 12 دورة. وعليه فإن افتراض بأن الكون بدون بداية يؤدي بنا إلى التسليم بأن عدد دورات الشمس لانهائي. ومن ثمّ فإن عدد دورات القمر أكبر من ذلك اللانهاية 12 مرة ! واستخلص فيلوبون أن على أرسطو والمتمذهبين بمذهبه أن يعيدوا النظر في مسألة بداية الكون.

لقد وجدت هذه الانتقادات صدى واسعا عند علماء العرب والمسلمين. وكان رجال الدين المسلمون قد اهتموا بهذا الموضوع وجادلوا فيه الفلاسفة الإسلاميين لأنهم كانوا عموما ضد فكرة وجود اللانهاية بكل أشكاله. في هذا الخضم برز ثابت بن قرة (المتوفى نحو سنة 900 ميلادي). ولم يفوّت ثابت الفرصة للإدلاء بدلوه في النقاش الدائر حول اللانهاية.



ثابت بن قرة (المتوفى نحو سنة 900 ميلادي)

وهكذا وردت إلينا آراء ثابت بن قرة عبر أجوبة عن أسئلة طرحها عليه أحد تلاميذه المسيحيين، وهو أبو موسى عيسى ابن السيد. فهناك فئة من رجال الدين ترى بأنه لو كان الكون بدون بداية لكان عدد الأرواح (الأزلية) المنفصلة عن الأجساد بعد الموت يمثل لانهاية. وهو يناقض رأي أرسطو. لكن ثابتا تساءل بهذا الخصوص : وما وجه التناقض إذا ما كان عدد الأرواح غير منته؟ واستنتج أن علينا التسليم باحتمال وجود لانهاية عددي.

وسأله تلميذه عن إمكانية وجود لانهاية أكبر من لانهاية آخر. فكان جواب ثابت بن قرة بليغا إذ يراه المختصون[1] أنه لأول مرة قام عالم بعمليات

---

[1] أنظر

Tony Lévy : Thabit Ibn Qurra et l infini numérique, Pour la Science, n° 278, Décembre 2000.

حسابية حول اللانهاية منبثقة عن خواص الأعداد الطبيعية، مع العلم أن الصيغة الرياضية المنسجمة لم تر النور إلا بعد ألف سنة من عهد ثابت بن قرة. ويرى ثابت في هذه القضية أن هذه الإمكانية - إمكانية وجود لانهاية أكبر من لانهاية آخر - واردة. لكنه لم يقدم تعريفا للانهاية واكتفى بالرد على المتسائلين بأنه بالإمكان إعطاء معنى رياضياتي وعلاقة ترتيب بين اللانهايات تلغي تساوي اللانهايات.

ويتمثل ذلك، حسب ثابت، باستخدام لغتنا الحديثة، بتعريف "المساواة" بين مجموعتين لامنتهيتين (مثل مجموعة الأعداد الزوجية ومجموعة الأعداد الفردية) بتساوي قواهما : عدد الأعداد الزوجية يساوي عدد الأعداد الفردية، وهذا العدد يساوي نصف عدد الأعداد الطبيعية. ومن ثم يبرهن ثابت على وجود نهاية أكبر من الآخر.

ورغم هذا الرأي الجريء لم يقف ثابت بن قرة ضد القائلين بأن "الكلّ أكبر من الجزء". أليست مجموعة الأعداد الطبيعية أكبر من مجموعة الأعداد الزوجية؟

والملاحظ أن رياضياتيي القرن العشرين عرفوا كيف يجعلون من لامتناهيات الصغر كائنا حقيقيا. والواقع أن الطريقة التي استخدمت خلال القرن التاسع عشر لتمتين الحساب اللامتناهي قد أدت إلى رفض اللانهاية الفاعل الذي استبدل بلانهاية كامن، وهو لانهاية الكميات التي تقترب أكثر فأكثر من نهايتها.

ذلك هو حال السائر على الأقدام فيخطو الخطوة تلو الأخرى، وهو يعلم أن باستطاعته مواصلة عملية السير هذه بدون انقطاع، وإضافة خطوة جديدة (وهي تعني بلغة الأرقام إضافة "1") كلما شاء (الخطوة التي يعلم أنه

قادر على تحقيقها دون أن يخطوها هي خطوة "كامنة"). ولذلك يعتبر اللانهاية الكامن مفهوما مرتبطا بالأعداد الطبيعية وبمفهوم توالي الأعداد الطبيعية. أما مفهوم اللانهاية الفاعل فتصوره يستدعي تصور مفهوم التطبيق التقابلي بين مجموعتين (بمفهوم لغة المجموعات). والواقع أنه نشأ في سياق هندسي مثل ضم نقطة أو نقاط إلى مجموعة معينة، مثل إضافة نقطتي اللانهاية إلى طرفي المستقيم (العددي).

وقد عبّر أمير الرياضياتيين كارل فردريك غاوس Carl Friedrich Gauss (1777-1855) عن شعور الأسرة الرياضياتية في ذلك العهد فكتب : "أحتجّ على استخدام كائن لانهائي ككل كامل؛ إن هذه العملية ممنوعة في الرياضيات لأن اللانهاية ليس سوى تعبير مجازي."



كارل فردريك غاوس
(1855-1777) Carl Friedrich Gauss

وفي هذا السياق ظهرت قضية عرفت بمحيّرة الانعكاسية : إذا كانت مجموعة لامنتهية فيمكننا أن نقيم تقابلا "نقطة نقطة" بينها وبين جزء ذاتي منها (أي جزء يختلف عن المجموعة ذاتها). ومن بين العلماء الذين عالجوها الرياضياتي برنارد بولزانو Bernard Bolzano (1781-1848). ثم تطوّر حلها مع التطورات التي عرفتها نظرية المجموعات : يجب التمييز في المجموعات بين العلاقة "محتوى في" والعلاقة "أصغر حجما من". ذلك أن مجموعة مربعات الأعداد الطبيعية، مثلا، محتواة في مجموعة الأعداد الطبيعية : لكننا إذا نظرنا إلى هاتين المجموعتين ككلّ نجد أن لهما نفس الحجم. وعلى الرغم من أنه إذا كانت مجموعة A محتواة في مجموعة B يكون حجم A أصغر من حجم B أو يساويه فإن علينا الانتباه إلى أن الحجمين يمكن أن يتساويا.



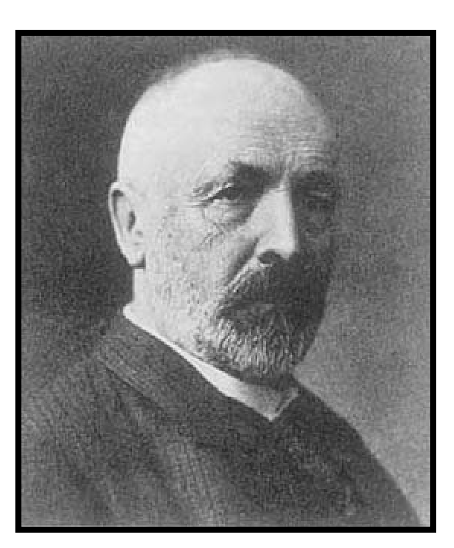
برنارد بولزانو

(1848-1781) Bernard Bolzano

يستخدم العلماء بدل لفظ "حجم" المصطلح التقني "عِدَّة" cardinal. لكن هذا الأمر ليس ذا شأن، فالفكرة الوحيدة لحلّ المحيّرة هي التسليم بأن مجموعة A يمكن أن تكون محتواة تماما في مجموعة B ومع ذلك يكون للمجموعتين A و B نفس الحجم. يجب تقبّل ما كان محيّرا والإعلان عن أنها لم تعد محيرة عبر عملية ازدواجية المفهوم : "محتوى في" لا يعني "أصغر حجما من".

لكن، ألا يؤدي هذا التسليم إلى تناقضات تجعل الرياضيات غير منسجمة، وبالتالي غير مقبولة؟ إنه تساؤل وجيه، ولم يكن من السهل الإجابة عنه. فجرأة بولزانو يبدو أنها توقفت عند مقترحه ولم يحاول مواصلة دراسة ما يترتّب عنها من انعكاسات خطيرة على المفاهيم الرياضية. وهكذا قام آخرون بهذه المهمة. كانت الاستكشافات الرياضية للجبر الخاص بالتقابلات طويلة وملتوية، ذلك أن بولزانو دشن بمقترحه مرحلة اضطرابات خطيرة ومليئة بالمجادلات الحادة واللاذعة أحيانا.

لقد ميّز الألماني جورج كنتور Georg Cantor (1845-1918) بين حجوم المجموعات اللامنتهية : فلو كان الأمر غير ذلك، أي لو كان بالإمكان إقامة تقابل بين كل مجموعتين لامنتهيتين لفقدت نظرية حجوم المجموعات اللامنتهية أهميتها بشكل ملفت للانتباه ! وتفطّن كنتور عام 1874 إلى أنه من المستحيل إيجاد تقابل بين مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد الطبيعية : حجم المجموعة الأولى أكبر تماما من حجم الثانية.



جورج كنتور

(1918−1845) Georg Cantor

تعتبر هذه النتائج مرحلة تقدّم أولى في سبيل إدراك اللانهاية الفاعل، وهي تمثل البرهان على أن ما نكتشفه بالغ الأهمية : أنشأت هذه النتائج قائمة مرتبة لـ "الكليات اللامنتهية" سمحت للعقل برسم معالم يقتاد بها وقت الحاجة.

ورغم ذلك لم تكن هذه النتائج الأولى مقبولة لدى الجميع حيث رفضها البعض وانتقدها البعض الآخر.

وكان كنتور قد قام بعمل هام اكتشف فيه العديد من خواص حجوم المجموعات اللامنتهية ... تلك المجموعات التي بدت له في أغلب الأحيان قاب قوسين أو أدنى من المحيّرات. وقد تميّز الرياضياتي ليوبولد كرونكر Leopold Kronecker (1823-1891) بحدة انتقاداته [2] لهذا العمل وعرقل نشر بحث كنتور في المجلة الذائعة الصيت Le Journal de Crelle مما جعل كنتور يمتنع فيما بعد عن إرسال أعماله لها.

2 لقد أدى الحال بكنتور، من جراء عدم تفهّم زملائه الألمان لنظريته وأفكاره الجديدة، إلى اختلال عقلي واللجوء إلى مستشفى الأمراض العقلية، حيث هلك هناك قبل أن يرى ثمرة جهده تشغل الدنيا من أقصاها إلى أقصاها. ومعلوم أن كرونكر هو الذي وقف بشدة في وجه كنتور وقاد حملة ضده.



ليوبولد كرونكر

(1891−1823) Leopold Kronecker

كان مقال كنتور الذي أخّر كرونكر نشره يحتوي على نتيجة مدهشة لا تشكل محيّرة وإنما اعتبرت في ذلك الوقت بأنها طرحت وضعية غير مرضية منطقيا مرتبطة بتصنيف اللانهايات. وتقبّل كنتور هذه الحقيقة الجديدة دون الإعلان عن أنها محيّرة رغم الإزعاج الذي تولّد عنها. وبما أن استدلالات وحسابات كنتور التي أجراها بعناية فائقة لم تظهر أية تناقضات فعلية فلا بدّ أن تكون لنا الجرأة الكافية لتقبّل ما أفرزته مداركنا في مجال الاستدلالات، ومواصلة استكشاف هذا السبيل رغم كل ما يحدث هذا الواقع الجديد من تساؤلات.

لقد طوّر كنتور، بوصفه منظرا متقِنا ومتفانيا، حسابا خاصا باللانهاية، أي أنه مدّد القواعد الحسابية - المطبقة على الأعداد الطبيعية في قياس المنتهي - لتشمل الأعداد التي يستخدمها لقياس اللامنتهي. وأدخل كنتور عام 1893 الرمز $\aleph$ (هو الحرف ألف بالعبرية) للإشارة إلى عدّة مجموعة الأعداد الطبيعية، وكذا الرمز $2^{\aleph_0}$ إشارة إلى عِدّة المتصل (أي مجموعة الأعداد الحقيقية).

وعندئذ اكتشف كنتور مسألة عويصة لم نتمكن إلى اليوم من حلّها : إنها فرضية المستمر (أو المتصل) hypothèse du continu.

إن عدّة مجموعة الأعداد الحقيقية (المسماة "المتصل" أو "المستمر") والتي تقاس بـ $2^{\aleph_0}$، أكبر تماما من عدّة الأعداد الطبيعية (المسماة اللانهاية القابل للعد والمقاسة، كما أسلفنا، بـ $\aleph_0$). لكن، هل هناك عدّة أخرى بينهما؟

وبعد هذه المرحلة الصعبة بالنسبة للرياضياتيين، تمّ وضع نظرية المجموعات في قالبها الشكلي (الصوري) وأثبتت نتيجتان بالغتا الأهمية تتعلقان بفرضية المتصل. لقد برهن الرياضي النمساوي كورت غودل Kurt Gödel (1906-1978) عام 1938 بأنه لو كانت نظرية المجموعات المعتادة منسجمة (أي لا تؤدي إلى تناقضات) فإن نفس النظرية لا تؤدي إلى تناقضات إذا ما اكتملت بالمسلمة القائلة بصحة فرضية المتصل.

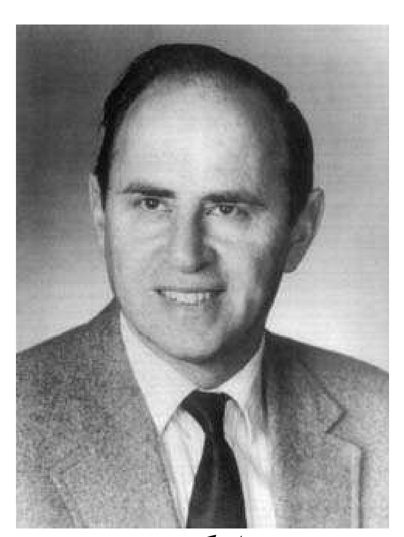


كورت غودل

(1978−1906) Kurt Gödel

وهكذا فإن التسليم بفرضية المتصل لا يهدّد بإسقاط نظرية المجموعات المعروفة. وذهب بول كوهين Paul Cohen (1934-2007)، عام 1963، إلى أبعد من ذلك إذ برهن على أنه إذا كانت نظرية المجموعات منسجمة فإن إكمالها بالمسلمة القائلة بخطإ فرضية المتصل لا يؤدي إلى أي تناقض. وقد نال كوهين جزاء على برهانه هذا أعلى وسام في مجال الرياضيات، وهو ميدالية فيلدز.

إن معنى هاتين النتيجتين مجتمعتين يدلّ على أن من يسلم بقيام نظرية المجموعات المعتادة يستطيع إضافة المسلمة القائلة بصواب أو خطإ فرضية المتصل دون الخوف من إضافة تناقضات جديدة. وبمعنى آخر فإن نظرية المجموعات تترك الحرية للرياضياتيين في اعتبار فرضية المتصل قضية صائبة أو خاطئة.



بول كوهين

Paul Cohen (1934-2007)

إن هذه الوضعية المتمثلة في اعتبار فرضية المتصل غير قابلة للبت indécidable ليست محيّرة : ذلك أن النظرية لا تتناقض مع ذاتها بل بالعكس فهي لا تتخذ قرارا. وعلى كل الحال فإن هذا العجز الصارخ لا يرضينا من الناحية المنطقية بل يجعلنا في وضع لا نحسد عليه!!!

وهكذا ندرك أن عدم البت في فرضية المتصل لا تسوّي قضية اللانهاية بل تزيد الطين بلة : إن كانت نظرية المجموعات توفّر حقا إمكانية إدراك اللانهاية الفاعل ولا تمثّل عبثا فكريا مجانيا نتسلى خلاله برموز رياضياتية فإنه يمكننا أن نتقدم أكثر. كيف ذلك؟

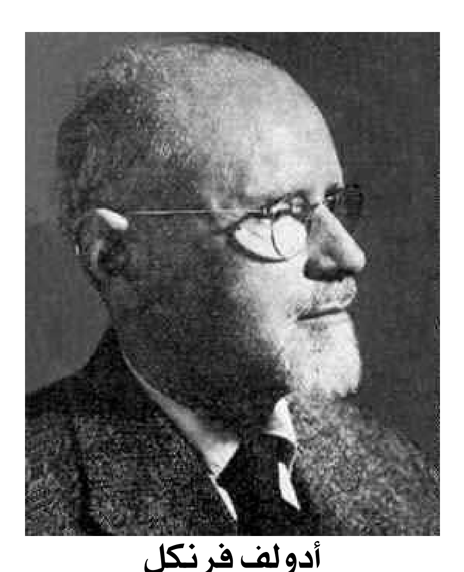
هناك سبيل أولى يمكننا اتباعها وهو إعادة النظر في نظرية المجموعات المعروفة. نشير عادة إلى هذه النظرية بـ ZF تلميحا لأرنست زرمولو Zermolo Ernst (1871-1953) و أدولف فرنكل Adolf Fraenkel (1891-1965) اللذين

أسّسا هذه النظرية في مطلع القرن العشرين. إنها نظرية تبدو غير مرضية لعدة أسباب. ولعل السبب الأول هو أنها تنشئ لدينا وضعيات منافية لحدسنا بخصوص وجود كائنات رياضية لا يمكننا إنشاؤها.



أرنست زرمولو
(1953-1871) Ernst Zermolo

وقد ظهرت العديد من النظريات الأخرى حاولت كلها سدّ هذا الفراغ، لكنها لم تحظ بعناية العلماء الذين ظلوا ميّالين إلى بساطة نظرية زرمولو- فرنكل. ولم يظهر على هؤلاء القوم وعي كبير بخطورة الوضع الذي أحدثته فرضية المتصل. والواقع أن هذه النظريات المتعاقبة تجبرنا على إعادة تقييم كل العمل الرياضياتي الذي تمّ إنجازه في الوقت الذي لم تظهر فيه أية تناقضات حقيقية. وكل ما يدفع البعض إلى الرغبة في التخلي عن نظرية زرمولو- فرنكل هو مجرد عدم رضى ذي طابع فلسفي.



أدولف فرنكل

(1965-1891) Adolf Fraenkel

ويتمثل السبيل الثاني في تقبّل نظرية زرمولو-فرنكل، أي اعتبار أنها لا تنص إلا على قضايا مقبولة بالنسبة للمجموعات لكنها غير كاملة. وفي هذه الحالة، فقد تكون بعض المسلمات ناقصة ويتعيّن على رجال المنطق والرياضيات أن يعملوا على إيجادها لإضافتها إلى المسلمات المعروفة. وعند العثور على هذه المسلمات (أو على بعضها) فسيكون بالإمكان البرهان على فرضية المتصل أو على نقيضها.

والملاحظ أن السبيل الثاني ليس عبثا إذ أن التأكيد على عدم الكمال الحالي لنظرية المجموعات يعني أننا نأخذ مأخذ الجد المبرهنات العامة المتعلقة بعدم التمام incomplétude التي برهن عليها كورت غودل عام 1931؛ مع الإشارة إلى أن عدم البت في فرضية المتصل لا تمثل سوى مظهر من مظاهر تلك المبرهنات في نظرية المجموعات. وهكذا فإن هذه السبيل سيؤدي إلى برنامج

بحث عن مسلمات جديدة من أجل إضافتها إلى نظرية المجموعات، وهو برنامج دافع عليه غودل نفسه.

وهكذا يبدو أن النظرية التي أنشأها كنتور قادرة على الصمود والوقوف. إنها قادرة على المضي قدما بإضافة مسلمات طبيعية جديدة. إن اللانهاية الفاعل ليس محيّرا ... ولا غير مرض منطقيا. فحاله ليس حال فرضية المتصل التي بعثت فينا شكوكا خلال فترة من جراء عدم البت فيها، بل على العكس من ذلك فهي منسجمة وأقرب إلى المنطق.

خلاصة القول : ألم تكن مراجعة مفهومنا للزمن والفضاء في الفيزياء، على ضوء مستجدات نظرية النسبية أمرا حتميا؟ إننا نشهد اليوم نفس الوضعية في الرياضيات، إذ يحتّم علينا مفهومنا للانهاية الفاعل إعادة بناء فكرتنا للكائنات وإعادة النظر في مفهومنا للواقع الرياضي. إنه لا يمكننا معارضة أولئك الذين يتقبّلون هذا الإصلاح العميق للمفاهيم بسلاح المحيرات. بل من حقنا أن نتصور بأن الوضعيات غير المرضية منطقيا التي لازلنا نعتقد أننا نواجهها ستتبدد كلما ازداد عقلنا تقبّلا لعالم المفاهيم الجديد. ذلك العالم المقترح من قبل رياضيات اللانهاية الفاعل التي ما فتئ الرياضياتيون يدقّقونها ويقرّبونها من الكمال إلى اليوم.

دعنا بعد هذا التقديم نتأمل في الميلاد العسير للانهاية وفي بعض ما يتصوره الرياضياتيون والفيزيائيون من خلال ترجمة القسمين الأولين من كتابين حول اللانهاية، وهما كتاب "اللانهاية والرياضيات" للمؤلف نوربرت فيرديي Norbert Verdier وكتاب ثان بعنوان "الفيزياء واللانهاية" للمؤلفين جون- بيير لوميني Jean-Pierre Luminet ومارك لاشييز- ري Marc Lachièze-Rey.

نبذة عن المؤلفين الثلاثة

1. المؤلف : نوربرت فيردي Norbert Verdier، مبّرز في الرياضيات، وأستاذ بجامعة باريس الجنوبية (أورسي). تتناول أبحاثه، بوجه خاص، تاريخ وفلسفة الرياضيات. وقد نشر العديد من المقالات التعميمية، وكذا كتابين في الرياضيات موجهين للتعليم العالي (منشورات إيسكا Eska). ومن جهة أخرى، ساهم فيردي في إصدار مجموعة من الأقراص المدمجة التربوية (منشورات باكيلر BacKiller).

2. جون- بيير لوميني Jean-Pierre Luminet فيزيائي فلكي وكاتب وشاعر مختص في الثقوب السوداء وعلم الكون. وهو يشغل منصب مدير بحث في المركز القومي للبحث العلمي في فرنسا ويشتغل بمرصد باريس- مودون Paris-Meudon.

3. مارك لاشييز- ري Marc Lachièze-Rey فيزيائي فلكي نظري ومختص في علم الكون. وينتسب بالموازاة مع التدريس الجامعي إلى معهد البحث في القوانين الأساسية للكون التابع لمحافظة الطاقة الذرية CEA الفرنسية. تعنى مؤلفاته العلمية بطبولوجيا الزمكان والجاذبية.

بعض المراجع

Bolzano B. : Les paradoxes de l’infini, Le Seuil, Paris, 1993.
Dauben J.W. : Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite, Harvard University Press, 1979.
Davis P. & Hersh R. : The mathematical experience, Birkhäuser, Boston, 1982.
Dawson J. : Gödel et les limites de la logique, Pour la Science, août 1999.
Dawson J. : Godel’s life, Solomon Feferman (ed.), Kurt Godel collected works, vol. 1, Publication 1929-1936, Oxford Univ. Press, 1986.
Delahaye J.-P. : Jeux mathématiques et mathématiques des jeux, Belin, Pour la Science, 1998.
Delahaye J.-P. : L’infini est-il paradoxal en mathématiques ? Pour la Science, Décembre 2000.
Dieudonné J. : The work of Nicolas Bourbaki, American Mathematical Monthly, 77, 1970.
Dieudonné J. : Pour l’honneur de l’esprit humain, Hachette, Paris, 1987.
W. Hao : Reflections on Kurt Gödel, MIT Press, 1987.
Kanamori A. : The Higher Infinite, Springer-Verlag, 1994.
Largeault J. : Intuitionisme et théorie de la démonstration, Vrin, Paris, 1992.
Lévy T. : Thabit Ibn Qurra et l’infini numérique, Pour la Science, Décembre 2000.
Krivine J.-L. : Théorie des ensembles, Cassini, Paris, 1998.
Monnoyeur F. et al. : Infini des mathématiciens, infini des philosophes, Belin, 1992.

ترجمة القسم الأول من كتاب

اللانهاية في الرياضيات

L'infini en mathématiques,
Norbert VERDIER
Flammarion, 1997

تأليف

نوربرت فيردي Norbert Verdier
جامعة باريس الجنوبية

عندما يظهر في نص الكتاب لفظ ذو صلة بمصطلح متخصص وورد في قائمة "أبرز المصطلحات" فإننا نرفقه بالعلامة *.

تقديم

يرفع أحد مشاهد رواية روبرت موزيل Robert Musil التي تحمل عنوان " اضطرابات التلميذ تورلس Törless " الحجاب عن الدراسة التي سنقوم بها في هذا الكتاب. كان إطار تلك الرواية مدرسة داخلية نمساوية لأطفال العائلات الوجيهة. وقد وصف الكتاب الاضطرابات ذات الطابع الجسدي والأخلاقي والفكري لتلميذ اسمه تورلس. دعنا نهتم بأحد تساؤلاته الرياضياتية. كان تورلس يفترش العشب ويتأمل فبدا له فجأة أنه من المستحيل بلوغ السماء عبر سلّم طويل. كان يقول :"لا وجود لنهاية إطلاقا، يمكننا أن نذهب دائما إلى مكان أبعد، إلى لانهاية". ولم يكن تورلس قبل ذلك قد شعر بحاجة إلى المزيد من المعلومات حول مفهوم اللانهاية المستخدمة في دروس الرياضيات. "وفجأة، أدرك أن هناك أمرا جدّ مقلق مرتبطا بهذا اللفظ، فارتعش. ... (ربما) استفاقت من سباتها بغتة قوة غير عقلانية ومتوحشة ومدمّرة واستعادت خصوبتها. كانت موجودة هنا، حيةً، مهدّدة، ساخرة ..."

تتدخل مسألة اللانهاية في الرياضيات كقوة "مشوِّشة ومحرِّكة" في آن واحد. سنبدأ في المرحلة الأولى بتوضيح معنى الكلمات التي اختارها موزيل لوصف اللانهاية وذلك بالعودة إلى تواريخ وحقب هامة عبر القرون والحضارات. ما هو اللانهاية في الرياضيات؟ ما الذي يجعله يمثل "قوة غير عقلانية، "مدمّرة"، "مهدّدة"؟ وفي مرحلة ثانية، سنعتمد هنا أيضا على أمثلة دقيقة لنتساءل عما إذا كان هذا المفهوم لا يزال في صلب الرياضيات الحالية والمستقبلية. هل أجابت الرياضيات عن السؤال المتعلق بمفهوم اللانهاية؟

الفهرس الكامل للكتاب

عندما يظهر في نص الكتاب لفظ ذو صلة بمصطلح متخصص وورد في قائمة "أبرز المصطلحات" فإننا نرفقه بالعلامة *.



نحو فن مسلّماتي : يرى برنار فيني Bernar Venet أن "عمل الفنان يبدأ دائما بطريقة مسلماتية، أي أنه ينطلق من قضية يعتبر أنها "قائمة"، ثم يخوض في استدلالات استنتاجية معتمدا على منطق خاص به". ينطبق هذا التعريف للفن أيضا على الرياضيات. قوس بـ 115,5 درجة، فولاذ مدهون، 0.98×38×19، 1988. حديقة ألبير الأول، نيس Nice.
Ph. © A. Parinet/Explorer. © ADAGP, Paris, 1997.

مفهوم اللانهاية في الرياضيات

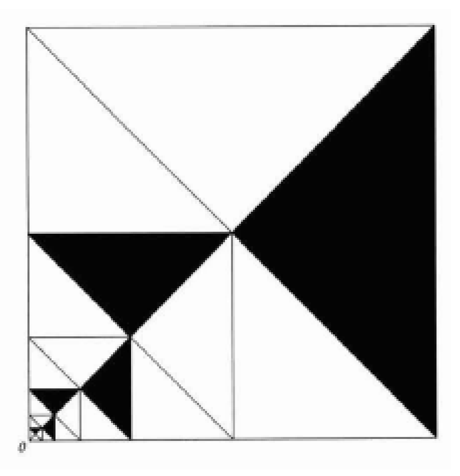
اللانهاية عند الإغريق

اللانهاية حديثا وقديما

يمكننا انطلاقا من متتالية* الأعداد الطبيعية* 1، 2، 3، ... ، أن نلمح اللانهاية، أو لنقل إننا نلمح ما لا ليس لانهاية. هل اللانهاية مليون، أو مليار، أو بليون، أو تريليون؟ لا، الأمر ليس كذلك لأننا نعلم أن هناك، من أجل كل عدد من هذه الأعداد عددا أكبر منه : يكفي أن نضيف 1 لكل منها. وهكذا فإن ما نستخلصه في ختام هذه تجربة هو أن اللانهاية يبدو، في موضوع الأعداد، كأنه عدد أكبر من كل عدد* معلوم.

وهناك تجربة أخرى مألوفة ترتبط بمفهوم اللانهاية، وهي خاصة بالأشكال المتكررة التداخل : يتعلق الأمر بشكل يتضمن الشكل ذاته بصفة متكررة. هذا ما يذكرنا تلقائيا بالعلامة الشهيرة "البقرة الضاحكة" التي صممها بنجمين رابيي Benjamin Rabier: كل بقرة ضاحكة تحمل حلقة في أذنها تمثل بقرة ضاحكة حاملة في أذنها، هي الأخرى، حلقة تمثل بقرة ضاحكة، إلخ.

لنقدم مثالا ثانيا نحاول من خلاله أن "نستشف" اللانهاية. يكفي أن نتزود بمرآتين وأن نواجه إحداهما ثم نعدّل وضعية المرآة الأخرى حتى نشاهد صورتنا تتكرّر وتتلاحق. ذلك أن تقابل مرآتين ينشئ تلاحق سلسلة من الصور المتداخلة بشكل يفقدنا الرشد.



مثلثات سوداء على خلفية بيضاء : ننشئ مثلثات سوداء تتناقص مساحاتها تدريجيا. تبدو في الشكل أعلاه ستة مثلثات أصغرها المثلث السادس، لكن مواصلة عملية الرسم سيظهر للعين، بعد عدة مراحل، المثلث الأخير مطابقا للنقطة O. يقول الرياضياتي في هذه الحالة إن متتالية المثلثات تؤول نحو النقطة O. ورغم ذلك نلاحظ أن هذه النقطة لا تنتمي إلى أي مثلث : إنه تَمَثّل للعقل، إنه مرور إلى اللانهاية.

لاحظ أننا عندما نتناول هذه الأشكال المتكررة التداخل نكتفي في واقع الأمر بوصف المراحل الأولى - كما فعلنا آنفا - ونحن نوحي بالتكرار غير المتناهي للصورة. دعنا نذهب إلى أبعد من ذلك بتحليل أعمق لشكل جد بسيط متكرر التداخل. لنعتبر قطعة من الخيط طولها متر واحد ولنقسمه إلى قطعتين متساويتين، ثم نتخلص من إحدى القطعتين. في نهاية المرحلة الأولى يبقى لدينا نصف الخيط. نعيد الكَرّة بتقسيم هذه القطعة إلى نصفين ونتخلص من أحد النصفين. في نهاية المرحلة الثانية يبقى لدينا رُبع الخيط الذي كان لدينا في بداية التجربة. ماذا يبقى لنا في آخر المطاف لو نواصل تكرار نفس العملية لانهائيا؟ يبدو واضحا بأنه سرعان ما سنفقد الخيط بأكمله.

لنفترض أنه بسبب تقطيع الخيط إربًا إربًا لم يبق لنا منه شيء بعد المرحلة العاشرة. باعتبار أن $\frac{1}{2}$ هو القطعة المحذوفة خلال المرحلة الأولى و $\frac{1}{4}$ هو القطعة المحذوفة خلال المرحلة الثانية، ...، و $\frac{1}{1024}$ هو القطعة المحذوفة خلال المرحلة العاشرة فهل هذا يجيز لنا كتابة

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128}-\frac{1}{256}-\frac{1}{512}-\frac{1}{1024}=0?$$

يكفي أن نعرف كيف نجمع الكسور ليتبيّن لنا بأن :

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128}-\frac{1}{256}-\frac{1}{512}-\frac{1}{1024}=\frac{1}{1024}$$

علما أن هذا العدد قريب من 0.001 .

لا شك أن هذا العدد صغير، لكنه يختلف عن الصفر ! وإذا ما أنجزنا مائة مرحلة فسيبقى من الخيط $\frac{1}{2^{100}}$، وهي قيمة صغيرة جدا غير أنها ليست منعدمة.

فمن جهة، إذا ما حكّمنا عقلنا فإننا نميل إلى الاعتقاد بأن تقطيع الخيط عددا منتهيا من المرات يجعلنا نفقد كل الخيط؛ ومن جهة أخرى يدلنا الحساب بأن، مهما كان كبر العدد المنتهي من المراحل التي نعتبرها، فلا بد أن تبقى لدينا قطعة صغيرة من هذا الخيط. وهكذا نصل إلى تناقض، أي إلى محيّرة (مفارقة)* تسمى لدى الرياضياتيين محيّرة التثنية*. وبطبيعة الحال فإن هؤلاء يتحدثون عن المجال (أو الفترة) أو القطعة المستقيمة أكثر مما يتحدثون عن الخيط !

لقد شكّلت هذه المحيّرة عقبة كبيرة أمام الرياضياتيين الإغريق. وكانوا قد اضطربوا كثيرا عند ظهور اللانهاية في شكل آخر. وأدى تأثير فيثاغورس (القرن السادس قبل الميلاد) بهؤلاء إلى الاقتناع بأنه من الممكن ربط كل مقدار فيزيائي أو هندسي بعدد كامل* (صحيح) أو ناطق* (العدد الناطق هو عدد

يكتب كنسبة لعددين صحيحين). وبرهن الفيثاغورسيون على أن قطر مربع طول ضلعه 1 ليس عددا (صحيحا أو ناطقا). ذلك أن الأعداد (الصحيحة أو الناطقة) لا تكفي لقياس طول أية قطعة مستقيمة هندسية مثل قطر مربع طول ضلعه 1. ولذا فلا بد أن تكون هناك أعداد أخرى - أعداد تسمى الأعداد الصماء*- لتصف الواقع. وقد أفضت هذه العقبة إلى أزمة حقيقية (الأولى في تاريخ الرياضيات) كبحت مسيرة الإغريق في تطلعهم إلى إدراك مفهوم العدد. ورغم ذلك عرفت هذه الأزمة تداعيات بالغة الأهمية على مختلف المدارس الفكرية للفلسفة الإغريقية. لنتعرف على المواقف التي اتخذتها إحدى هذه المدارس، وهي مدرسة إيلي Elée.

محيّرات زنون الإيلي

لقد ساهمت هذه المدرسة، التي أسسها بارمينيد Parménide خلال القرن الخامس قبل الميلاد، في تكوين الفكر العلمي التجريدي. وكانت تعارض بقوة التصوّرين اللذين يتصدران آنذاك الوضع. ويعتبر التصور الأول، المسمى التصور الاستمراري، العدد والفضاء والزمان والمادة بأنها كميات تتجزّأ حتى اللانهاية. أما التصور الثاني، المسمى التصور الذري، فيفترض وجود عناصر أولية لا تقبل القسمة ومتجانسة (هي الذرات).

وكان زنون الإيلي، الذي ولد نحو 495-480 قبل الميلاد، قد عارض الفرضيتين باقتراح محيّرات. لنقدم إحدى المحيريات التي وقفت ضد تصور الاستمرارية، وهي محيرة أشيل والسلحفاة : سابق أشيل السلحفاة، لكنه ترك هذه الأخيرة تتقدم قليلا مراعاة لإعاقتها الطبيعية. وبينما كان أشيل يقطع المسافة الفاصلة بين نقطة الانطلاق ونقطة انطلاق السلحفاة كانت هذه الأخيرة

أيضا تتقدم. لا شك أن أشيل قد غطّى جزءا من تأخره غير أن السلحفاة ظلت متقدمة عليه. فإذا افترضنا أن الفضاء والزمان ينقسمان حتى اللانهاية فإن أشيل لن يدرك قطّ السلحفاة. في حين أننا لا نحتاج إلى أن نقوم بسباق مع سلحفاة لكي نتبيّن أنه بالرغم من تقدم السلحفاة في البداية فإن أشيل سيفوز في السباق. إن الصعوبة في هذا المثال تكمن في استحالة جمع عدد غير منته من المسافات تتصاغر تدريجيا مع تصور أن "مجموعها" يمكن أن يعادل مقدارا منتهيا. نستطيع أن نشبّه هذا المثال بمثال الخيط. لقد رأينا بأنه من الخطإ أن نكتب :

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}$$

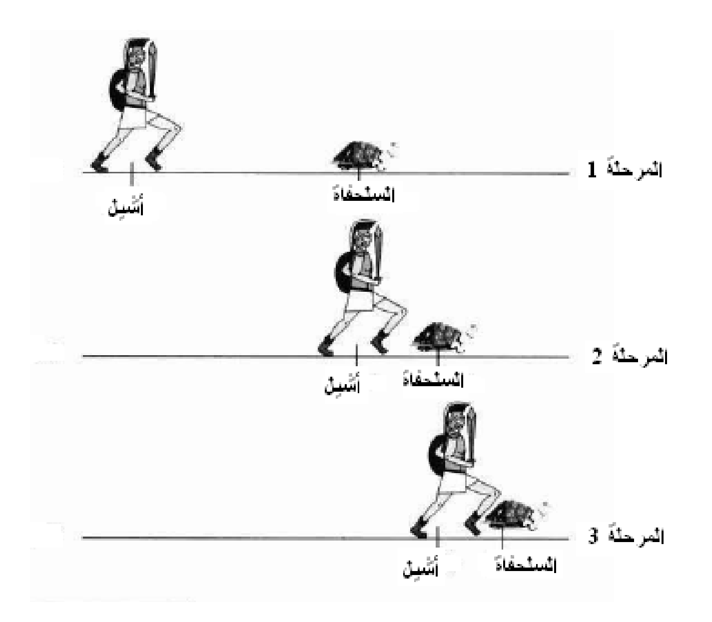
(يشير هنا 1 إلى طول الخيط في بداية التجربة، ويمثل $\frac{1}{2}$ نصفه، الخ.).

ورغم ذلك إذا ضخّمنا عدد التقطيعات فإن الخطأ المرتكب عند كتابة المساواة سيكون أصغر فأصغر. ومن ثمّ، هل يمكننا كتابة :

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}+...?$$

إن اللانهاية يحوم حول نقاط الاسترسال الثلاث "..." الواردة في العلاقة السابقة، غير أن مثل تلك العلاقة لم تكن تحمل معنى لدى زنون. والواقع أنه كان علينا انتظار أزيد من ألفي سنة حتى نأتي على تبرير تلك المساويات. إن رياضياتي اليوم لا يرون حرجا في أن يكون مجموع عدد غير منته من المقادير المتصاغرة تدريجيا مساويا لمقدار منته، لكن هذا الأمر كان عجيبا وغريبا في عهد زنون. إنها قصة طويلة.

لقد وصلتنا محيّرات زنون بفضل أرسطو (384-322 قبل الميلاد) الذي وصفها في مؤلفه "فيزيقا" بهدف دراستها عن كثب.



أشيل والسلحفاة. يبدو أشيل على وشك إدراك السلحفاة. ورغم ذلك فكلما بلغ أشيل النقطة التي كانت تتواجد فيها السلحفاة نلاحظ أن هذه الأخيرة قد غادرتها. تكمن وراء هذا السباق والملاحقة عدة أسئلة جوهرية : هل بالإمكان تجزئة الزمن إلى عدد غير منته من اللحظات؟ هل يمكن تجزئة طول إلى عدد غير منته من القطع؟ كيف يمكن تمثيل شخص (أو سلحفاة !) بنقطة هندسية؟ إنها أسئلة طالما لازمت الفلسفة والرياضيات منذ عصر زنون الإيلي.

أرسطو وأرخميدس

لقد أبرز أرسطو فرقا أساسيا : الفرق بين اللانهاية الكامن* (أو اللانهاية القادر) واللانهاية الفاعل* (أو اللانهاية الحاضر).

يعتبر اللانهاية الكامن إنشاء فكريا ضروريا للإتيان على حلّ بعض المسائل ذات الصلة بالرياضيات. فهو لا يستجيب لأي واقع فيزيائي، لكنه يمثل

ضرورة رياضياتية. والملاحظ لدى أرسطو أن أي مقدار يمكن أن يكون لامتناهيا كمونيًّا بعدة طرق. دعنا نشير إلى طريقتين. يمكن أن يكون المقدار غير منته بواسطة الجمع : أفضل مثال على ذلك هو مثال الأعداد الطبيعية. نستطيع أن نتجاوز أي عدد معطى بجمع (أو ضرب) أعداد طبيعية فيما بينها. ولذلك فلا وجود لنهاية ولا لحدود. سنرى لاحقا بأن هذه الفكرة أوحت لرياضياتيي القرن التاسع عشر بنظرية اللانهاية في الرياضيات (انظر ص. ...). كما يمكن أن يكون مقدار لامنتهيا بواسطة القسمة. لنعد إلى مثال التثنية (أو مثال الخيط إن فضله القارئ على التثنية). هب أن طول قطعة مستقيمة يساوي مترا. لا شك أن هذه القطعة منتهية، غير أنه باستطاعتنا اعتبارها مكوّنة من مجموع نصفيْها، أو من مجموع نصف يضاف إليه نصف النصف، يضاف إليه ...، كما لو كانت هذه القطعة تتشكّل من عدد غير منته من القطع المتصاغرة في الطول. لقد أفضى هذا المفهوم للامتناهي في الصغر خلال القرنين السابع عشر والثامن عشر إلى بزوغ الحساب اللامتناهي* في الرياضيات.

أما اللانهاية الفاعل فهو لانهاية يبدو أنه موجود بالفعل. وقد دافع أرسطو عن الفكرة القائلة بأنه يستحيل أن يكون كائن حقيقي لامنتهيا فعليا (بمفهوم اللانهاية الفاعل)، بل بمقدوره أن يكون لامنتهيا بمفهوم اللانهاية الكامن فقط. وقد اختير لفظ "الكامن" أو "القادر" في وصف اللانهاية للدلالة على نمط الواقع الذي يجسده لفظ "المحتمل"، علما أن "المحتمل" ليس هو "الواقع". وهكذا ننفذ إلى فكرة اللانهاية عبر الخطاب الكلامي والبناء الفكري، لكن هذا اللانهاية لا يمثل سوى اللانهاية الكامن. إليك مثالا يدعم المواقف الأرسطوطية. نعتبر متتالية الأعداد الصحيحة

$$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \dots\ n\ \dots$$

ومتتالية الأعداد الزوجية

$$2\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 10\ \ 12\ \dots\ 2n\ \dots$$

إذا ما ألحقنا كل عدد n بالعدد الزوجي $2n$ يمكننا القول بأن كمية الأعداد الزوجية تعادل كمية الأعداد الطبيعية. إن هذا القول يتنافى مع إحدى المسلّمات الأساسية في الهندسة الإغريقية التي تنصّ على أن الكل أكبر من الجزء. الكل في مثالنا هو مجموعة الأعداد الطبيعية والجزء هو مجموعة الأعداد الزوجية. إن المجموعة الأخيرة لا تمثّل كافة الأعداد الطبيعية، ورغم ذلك فكمية الأعداد الزوجية تعادل كمية الأعداد الطبيعية. إنها مفارقة عجيبة !

إلا أن العمل ضمن سياق اللانهاية الكامن لا يُظهر أية مفارقة في الوضعية السابقة. فمن بين أولى الأعداد الطبيعية حتى العدد 10000 نجد الأعداد الزوجية التالية: $2\times1=2$ ، $2\times2=4$ ، $2\times3=6$ ، $2\times4=8$ ، ... ، $2\times5000=10000$.

وبالتالي هناك 5000 عدد زوجي من بين أولى الأعداد الطبيعية حتى العدد 10000، وهذه الأعداد الزوجية هي $2\times1=2$ ، $2\times2=4$ ، $2\times3=6$ ، $2\times4=8$ ، ... وآخرها $2\times5000=10000$. ومن ثمّ يتضح أن عدد هذه الأعداد الزوجية أصغر من عدد الأعداد الطبيعية. ومما لا شك فيه أن هذه النتيجة تظل قائمة سواء اعتبرنا عشرة آلاف، أو عشرين ألفا، أو مليون عدد طبيعي، أو أكثر من ذلك بكثير. إننا لا نصادف هنا أية محيّرة. والواقع أن السؤال المحيّر يطرح عندما نعتبر مجموعة الأعداد برمتها، ككل، أي لدى اعتبارها لانهاية فاعل وليس كسلسلة غير متناهية من الأعداد. لنختم قولنا بالتأكيد، كما فعل أرسطو، على أن اللانهاية الكامن يفي بكل حاجيات

الرياضياتيين. لقد كتب أرسطو بشأن هؤلاء : "إنهم لا يحتاجون في الواقع للانهاية، وهم لا يستعملونه، بل يحتاجون فقط إلى وجود مقادير كبيرة بالقدر الذي يريدون".

كان لأفكار أرسطو وتصوراته بعض المناوئين مثل أرخميدس (القرن الثالث قبل الميلاد). فانطلاقا من المبدإ القائل إن كمية حبّات الرمل على وجه الأرض لا تفنى اعتبر أرخميدس أننا نستطيع تمديد متتالية الأعداد الصحيحة إلى لانهاية (اللانهاية الفاعل). لكنه لم يخض في اللانهاية لدى تطرقه لحساب المساحات بل صمم استراتيجية تتيح له إمكانية تفادي العقبات التي تنجم عن اللانهاية. تسمى هذه الطريقة طريقة إفناء الفرق*، أو طريقة القدامى، وهي أساس الحساب التكاملي* (انظر ص. ...). لقد أوردنا وصفا مختصرا لهذه الطريقة ضمن الملحق (انظر ص. ...) خدمة للقارئ الراغب في الاستزادة.

كانت طريقة إفناء الفرق قد وُرِثت عن أقليدس، ثم استغلها أرخميدس استغلالا كبيرا، وهي تميّز الهندسة الإغريقية بكل ما فيها من تحفظات واستراتيجيات إزاء اللانهاية بكافة أشكاله. يزول هنا أثر اللانهاية باللجوء إلى استدلالات تتضمن عددا منتهيا من المراحل فنتفادى بذلك كل إحالة إلى مقادير غير منتهية.

نحو نظرية للامتناهي الصغر

الخلفاء العرب لأرخميدس وأرسطو

لم يكن لأرخميدس الكثير من التلاميذ في عالم الإغريق. ورغم ذلك، فمنذ القرن التاسع، انكب رياضياتيو بغداد، وهي المدينة التي كانت ترمز خلال أزيد من ثمانية قرون للعلم وترقية المعارف. وهناك تمت ترجمة علوم الماضي، سيما تلك التي طورها الإغريق، كما تم تحقيقها وتحليلها. وهكذا أعاد ثابت بن قرة (836-901) اكتشاف نتائج برهن عليها أرخميدس وطورها، وكذلك فعل فيما بعد (في نهاية القرن العاشر) ابن الهيثم. إلا أن هذين العالمين تجنبا، كما كان حال المهندسين الإغريق، المسألة الشائكة المتعلقة باللانهاية بفضل طريقة إفناء الفرق. وكان علينا انتظار القرن السابع عشر لتبرز هذه التقنية في شكل نظرية حقيقية، سميت بالحساب اللامتناهي، تسمح بالإحاطة المباشرة بكميات لامتناهية الصغر.

وكانت قد ظهرت هنا وهناك معارضات محلية لأرسطو على صعيد الأفكار العامة المتعلقة باللانهاية، سيما حول موضوع خلود الكون. وهكذا عارض المسيحي الأسكندراني جون فيلوبون Jean Philopon خلال القرن السادس مواقف أرسطو حول خلود الكون (كوْن بدون بداية ولا نهاية). يرى فيلوبون، خلافا لأرسطو، أن الكون من خلق الله، ومن ثمّ فللكون بداية ونهاية. وإن افترضنا أنه لا بداية للكون فسيكون عدد بني آدم الذين عاشوا قبل سقراط غير منته. وإذا ما أضفنا إلى ذلك العدد عدد الأشخاص الذين عاشوا

بعد سقراط إلى اليوم فسنحصل على "عدد أكبر من اللانهاية". وهذا مستحيل. ينتج من هذا التناقض أن الكون لا يمكن أن يأتي إلا بـ"فعلٍ سَيّدٍ". وبحكم الظهور الإلهي للكون فإن له بداية ونهاية. وبعد ذلك عارض مفكرون عرب وفرس خلال القرن التاسع (الكِنْدي الملقب بـ"فيلسوف العرب" وابن سينا، ...) بعض أفكار أرسطو.

نشير إلى أنه كانت هناك اعتراضات أكثر منهجية لدى هاسداي كرِسكاس Hasdai Crescas (1340-1412). كان كرسكاس من جماعة أرَغون Aragon اليهودية، وكان يرفض محيّرات اللانهاية كما رفض محيّرة الأعداد الزوجية (القائلة إن عددها يعادل عدد جميع الأعداد) موضحًا أن المساواة وعلاقات المقارنة (أكبر، أصغر) لا تنطبق على الكميات غير المنتهية. وهكذا أصبحت المسلَّمة المقدسة القائلة إن "الكل أكبر من الجزء" غير قادرة على التشكيك في استخدامات اللانهاية. ودافع هاسداي كرسكاس عن فكرة المقادير والأعداد اللامنتهية فعليا، لكنه من المهمّ القول إن انشغالاته كانت، قبل كل شيء، ذات طابع أيديولوجي. وكافح كرسكاس - بوصفه رجلا دينيا – ضد أطروحات أرسطو التي لوثت فكر النخب اليهودية الإسبانية. ووضع في المقدمة تحليلا شاملا مناهضا لفكر أرسطو يستجيب لتساؤلات الطبيعة وما وراء الطبيعة ليحل محل "المصائد المضللة" للفلسفة الإغريقية.

وهناك اعتبارات ذات طابع رياضياتي تتجاوز تلك الاعتبارات الميتافيزيقية للانهاية. لنورد في هذا السياق بعض السطور الجلية المعنى لثابت بن قرة : "يبدو من البديهي أن اللانهاية يمكن أن يكون أيضا ثلث اللانهاية أو ربعه أو خمسه، أو أي جزء من أجزاء اللانهاية ذاته. ذلك أن الأعداد التي لها ثلث

(مضاعفات ثلاثة) أعداد غير منتهية، وهي تشكل ثلث العدد بأكمله. كما أن الأعداد التي لها ربع (مضاعفات أربعة) تشكل ربع العدد بأكمله."

كان ابن قرة قد أكد في بادئ الأمر أن اللانهاية يمكن أن يكون مساويا لثلث اللانهاية لأنه يمكننا - كما هو الحال بخصوص العلاقة بين مجموعة الأعداد الطبيعية والأعداد الزوجية - أن نرفق كل عدد طبيعي n بجدائه في 3، أي $3n$. وهكذا فاللانهاية يساوي 3 مرات اللانهاية، كما يمكن القول إن اللانهاية يساوي ثلث اللانهاية، والأمر كذلك بخصوص بقية الدعاوى! وما ينبغي الانتباه إليه هنا هو أن ابن قرة كان يتناول بدايات الحساب المرتبط باللانهاية، بمعنى أنه كان يحاول التعامل مع اللانهاية كعدد من نوع آخر. غير أن الرياضياتيين، مثل جورج كانتور Georg Cantor، لم يتمكنوا من وضع أسس القواعد الحسابية للانهاية إلا بعد ألف سنة بعد ذلك التاريخ.

علم أصول الدين الغربي واللانهاية والرياضيات

كان الغرب، حتى القرون الوسطى، يجهل تقريبا كل شيء بخصوص نظريات أرخميدس، لكن مسألة اللانهاية كانت تناقش في الإطار الديني. وكان هناك جمع من رجال الدين ينظر إلى اللانهاية ككائن لا يمكن تصور من هو أعظم منه (أو أكثر منه واقعية). هذا الكائن، الجامع لكل عناصر الكمال هو الله الأوحد، الخالق المتعالي. لقد تطورت القيم المرتبطة باللانهاية منذ العصور القديمة وحتى ظهور الفلسفة الكلامية (scolastique) تطورا معتبرا. ففي البداية كان اللانهية يمثّل بصورة رمزية المسافة التي تفصل "الإلهي" عن "البشري" (وهو ما يوصف بـ"سمو الله"). وبعد ذلك صار اللانهاية يميّز إحدى صفات الله، وعندئذ لم تعد هناك أية إحالة إلى ما هو بشري. وفي هذا الاتجاه

جاء التعريف الشهير لباروخ سبينوزا Baruch Spinoza (1632-1677) : " ما أقصده بـ الله هو كائن لامتناه بصفة مطلقة، أي كنْه يتمتع بعدد غير منته من الصفات، كل منها يعبّر عن ذات خالدة ولانهائية." وقد حرص سبينوزا بعد ذلك على أن يزيد في توضيح تعريفه : "أقول 'لامتناه بصفة مطلقة' ولا أقول 'لا متناه في جنسه' لأنه بالإمكان أن ننكر كمًّا غير منته من الصفات في ما هو لامتناه في جنسه؛ وخلافا لذلك ففي اللامتناهي بصفة مطلقة نجد كل ما يعبّر عن ذات ولا يشمل أي نكران ينتسب إلى الذات."

وفي نفس الفترة قدم روني ديكارت René Descartes (1596-1650) في الشطر الثالث من مؤلفه "تأملات ميتافيزيقية" حجة تقول إن الله موجود لأن فكرة اللانهاية موجودة في باطننا. إلا أنه يميّز بين الكمال اللامتناهي الذي لا يملكه إلا الله وبين الكمية اللامنتهية، التي يصفها بـ"اللّامُحَدَّدَة"، والتي تظل دائما غير متكاملة، وهي من خصوصيات الرياضيات (اللانهاية الكامن). أما بيير غاسندي Pierre Gassendi (1592-1655) فقد جادل بالقول التالي، كي يمنع على ديكارت تعميق الحجة الرامية إلى استخلاص وجود الله : "إن من يقول شيئا 'لامنتهيا' يعطي بذلك لشيء لا يدركه اسما لا يلمّ به أيضا."

علينا ألا نخشى كلام غاسندي ولنتابع تحرّياتنا حول اللانهاية. إذا كان اللانهاية في الغرب يمثّل، بوجه خاص، مسألة لاهوتية فإن البعض "انحرف" واتجه نحو مقاربة أكثر دنيوية، وأكثر رياضياتية. ذلك ما قام به القديس منصور بن سرجون (جون دي دماس) Jean de Damas (حوالي 650-749) منذ القرن السابع حين أوضح بأننا إذا ما قارنا مليون صاع من القمح بصاع واحد يمكننا القول إن مليون صاع كمية لامنتهية مقارنة بالصاع. ومن ثم تبدو فكرة اللانهاية قضية نسبية.

وبعد ذلك، كتب روبرت غروستست Robert Grosseteste في مطلع القرن الثامن ما يلي :"هناك لامتناهيات أكبر من متناهيات أخرى، وهناك لامتناهيات أصغر من لامتناهيات أخرى. إن مجموعة الأعداد الزوجية والفردية مجموعة لانهائية؛ وبالتالي فهي أكبر من مجموعة كل الأعداد الزوجية، وهذا لا يمنعها من أن تكون لانهائية. ذلك أنها تفُوقُها بمجموعة كل الأعداد الفردية."

يعتبر قول غروستست الذي يؤكد على أنه بالإمكان أن يكون عدد غير منته أكبر من عدد آخر غير منته قولا بالغ الأهمية لأنه يفصل بشكل جلي في أعمال ابن قرة الذي يعتبِر، كما أسلفنا، بأنه من غير الممكن أن يكون عدد غير منته أكبر من عدد غير منته آخر. فهل اللانهاية يساوي نصف اللانهاية؟ أو لا يساويه؟ كيف يجب أن يكون هذا الأمر؟ وباختصار : من هو على صواب؟ روبرت غروستست أم ثابت بن قرة؟ لننتظر، هنا أيضا، حكم كانتور !

وقد واصل خلال القرن الموالي غريغوار دي ريميني Grégoire de Rimini (حوالي 1300-1358) التعامل مع اللانهايات غير المتساوية، وبدأ بتقديم تعريف إيجابي للانهاية : فهو يعتبر أن اللانهاية لا ينبغي أن ننظر إليه بأنه شيء غير موجود فحسب، بل يجب أن ننظر إليه أيضا كشيء له وجود. إن اللانهاية توسيع "إلى ما بعد" المنتهي. ويؤكد ريميني أيضا على ضرورة وضع طريقة حسابية وعملياتية تسمح بتناول اللانهايات كما نتعامل مع الأعداد الأخرى. وقد كان لهذا النداء المطالب بتأسيس حساب للانهاية يوسّع عمليات الحساب الكلاسيكي – والذي نستشفه أيضا من كتابات ابن قرة - صدى عند كانتور بعد خمسة قرون.

نحو التحليل اللامتناهي

كان لهذه الحوادث، التي تداخلت فيها أصول الدين والرياضيات والماورائيات الفضل، على الأقل، في تأجيج التساؤلات المرتبطة بالمفهوم الشائك للانهاية. وبذلك هيأت الأرضية لظهور الحسابات اللامتناهية خلال القرن السابع عشر. وقد قلّد الرياضياتيون الغربيون منهجية القدماء بعد أن تعرّفوا على أعمال أرخميدس، سيما بفضل الترجمات العربية. ثم حاولوا بسرعة، إثر إدراكهم لثقل طريقة إفناء الفرق، البحث عن طريقة أقل التواءً. وفي هذا السياق تعتبر أعمال بونافنتورا كفاليري Bonaventura Cavalieri (1598-1647) أعمالا أساسية.

يتصوّر كافليري الخطّ على أنه مجموعة (غير منتهية) من النقاط كما هو حال العِقْد المكوّن من مجموعة من الجواهر. وبالمثل، يتصوّر السطح على أنه مؤلف من مجموعة (غير منتهية) من الخطوط كما هو حال قطعة القماش المكوّنة من مجموعة خيوطها. والمجسم في هذا التصوّر هو مجموعة (غير منتهية) من المستويات كما هو حال الكتاب المؤلف من مجموعة صفحاته. لا شك في أن هذه المقارنات تساعد على الفهم، لكنها تنطوي على بعض التجاوزات لأن العِقد لا يحتوي سوى على عدد منته من الجواهر؛ كما أن قطعة القماش لا تتشكل إلاّ من عدد منته من الخيوط، والكتاب لا يضم سوى عدد منته من الصفحات. ذلك هو بيت القصيد لأن المشكلة التي تواجهنا تكمن في صعوبة جمع عدد غير منته من العناصر. إلا أن كافليري استطاع أن ينجو من هذا المأزق بتفادي القيام بجمع فعلي لمجموعة العناصر غير القابلة للقسمة (النقاط، الخطوط، المستويات) التي تكوّن الشكل المطروح، وهذا عندما يتعلق الأمر بحساب الطول والمساحة والحجم. كيف تناول كافليري هذا الموضوع؟ لقد لجأ إلى

مقارنات، وبدل حساب مساحة سطح مثلا أثبت أن تلك المساحة تساوي مساحة أخرى (انظر الملاحق، ص. ...).

وكان غريغوار دي سنت فنسان Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) قد تعمق في الموضوع أكثر من سابقيه حيث ملأ بدقة الشكل المنحني الذي كان يدرسه بعدد غير منته من الأشكال المنحنية بدل استخدام النقاط والخطوط والمستويات. والملاحظ أن قوة إرادة هذا الرياضياتي في ملء الأشكال بصورة شاملة جعلته يستعيد طريقة القدماء (حوالي 1647) ويسميها طريقة إفناء الفرق. وأدى به الحال، في سياق أبحاثه، إلى تقديم نص يوضح أن مجموعا غير منته من المقادير يمكنه أن يعرّف مقدارا، سماه "المنتهى Terminus". وتتميز هذه القيمة بكونها لا تجعلنا نحصل، حتى لو مدّدنا المجموع إلى أبعد الحدود، على قيمة تساوي ذلك المنتهى، بل نجد قيمة تقريبية له تتحسن كلما مدّدنا المجموع. ولكي نزداد إدراكا لهذا الوضع نعود إلى مثال ورد في الفصل الأول. إن السلسلة

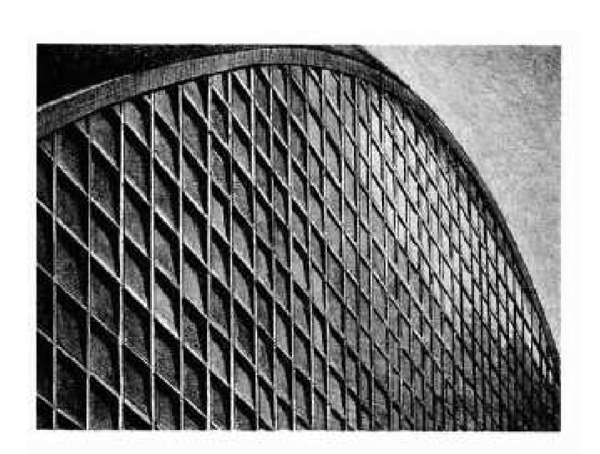
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}+\dots$$

تساوي 1، لكننا لا نستطيع كتابة المساواة إذا ما أهملنا نقاط الاسترسال (...) الواردة في يمين العلاقة والتي تدل على أن عملية الجمع تتواصل لانهائيا في الذهن. يمكن أن نلخص ما سبق بالقول إن السلسلة - مأخوذة جملةً واحدةً - تساوي 1 في حين أنها لا تساوي أبدا 1 إذا ما اكتفينا بجزء منها، لكن ذلك الجزء يقترب من 1.

كانت تلك الاعتبارات بمثابة إعلان عن التقدم النظري الذي سيحققه القرن السابع عشر ، وهو التقدم الذي سيسمح بالتحكم في تقسيم المقادير إلى مقادير تتضاءل قيمها، ثم جمعها بعد تجزئتها. وسيمكن هذا الوضع بدءا من

القرن السابع عشر من حساب المساحات والحجوم (انظر الشكل الموالي). ذلك ما يسمى في علم الرياضيات الحساب التكاملي.

وسيعرف الحساب التكاملي تطورا ملحوظا بفضل أعمال بيير فيرما Pierre de Fermat (1601-1655)، وبليز باسكال Blaise Pascal (1623-1662)، وأيضا الإنكليزي جون واليس John Wallis (1616-1703). أما الحساب اللامتناهي، أي الحساب الذي يتناول اللامتناهيات في الصغر - والذي يعتبر الحساب التكاملي جزءا منه - فسيتوسع بطريقة منهجية على أيدي إسحاق نيوتن Isaac Newton (1642-1727) وغوتفريد ويلهلم ليبنيتز Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).



الحساب التكاملي : حتى نحسب مساحة الواجهة الزجاجية التابعة لـ CNIT (المركز القومي للصناعات التقنية) بضاحية لادِفونس La Défense الباريسية، يكفي أن نجمع مساحات النوافذ المستطيلة. وإذا ما أردنا الحصول على قيمة تقريبية أكثر دقة نتصور أننا قسمنا الواجهة إلى مستطيلات جديدة أكثر عددا، ثم نجمع مساحاتها، وهكذا دواليك.

عند القيام بتقسيمات أكثر دقة (أي بتضخيم عدد المستطيلات) فإن القيمة التقريبية المطلوبة تؤول إلى قيمة نهائية تعبّر عن المساحة الواقعة تحت قوس الواجهة الزجاجية. إن قياس الأطوال والمساحات والحجوم من أهداف الحساب التكاملي. Dessin © Christine Ponchon.

لقد طوّر نيوتن وليبنيتز، كل منهما على حدة، طرقا عامة وأصيلة. وهذا ما سيسمح بإحداث قطيعة حقيقية مع الهندسة وإنشاء التحليلي اللامتناهي الذي سيطوّره ليونهارد أولر Leonahard Euler (1707-1783). وإذا كان يبدو أن اللامتناهي في الصغر صار طيّعا فإن الواقع ليس كذلك ! والدليل على ذلك المقالة النقدية للفيلسوف جورج بركلي George Berkeley الصادرة في مطلع القرن الثامن عشر. وقد أبرزت هذه المقالة الاعتراضات التي ظهرت من جراء إدخال هذه الكائنات اللامتناهية الصغر : " إنطلاقا من المبدإ القائل إن مجموع مقدارين لامتناهيين في الصغر يعادل أيضا مقدارا لامتناهي الصغر، نستطيع جمع لامتناهي الصغر δ إلى نفسه فنحصل على 2δ، ثم 3δ، ... وإثر ذلك يطفح الكيل : إذا كان $N\delta$ هو آخر اللامتناهيات الصغر فإن اللامتناهي الصغر الموالي، وهو $N\delta+\delta$، لن يكون كذلك؛ وهذا تناقض لأنه يساوي مجموع لامتناهييْ الصغر."

والواقع أنه طالما ظل الرياضياتيون يعملون في السياق الهندسي المحض دون اللجوء بشكل واضح إلى العدد فإنهم لن تعترضهم صعوبات جمة. لكن الأمر تغيّر في عهد ديكارت حيث صارت المسائل الهندسية تتحوّل إلى مسائل ذات علاقة بالأعداد. إنه تقدم حقيقي غير أن هناك مشكلا في إدخال الأعداد يكمن في أنها تأتي معها باللانهاية، أي اللامتناهي الصغر واللامتناهي الكبر. ولذا أصبحت قضية تحديد معنى العدد قبل الغوص في تلك المتاهات أمرا مستعجلا. سيكون ذلك من نصيب الإسهام الكبير الذي سيقدمه رياضياتيو القرن التاسع عشر (برنارد بولزانو Bernard Bolzano، أغسطين كوشي Augustin Cauchy، كارل فيرشتراس Karl Weierstrass، ريتشارد ديدكيند Richard Didekind، جورج كانتور Georg Cantor، إدوارد هاين Eduard Heine ...). وبفضل هؤلاء قفز التحليل اللامتناهي قفزة حاسمة على الرغم من أنهم جميعا حاولوا تجنّب الصعوبة المتصلة باللانهاية. وقد كان بولزانو وديدكيند وكانتور أكثرهم جرأة وشجاعة.

تعريف سليم للعدد

كان الرياضياتيون الإغريق يتعاملون مع الأعداد الطبيعية والناطقة. ومن المعلوم أن كل عدد ناطق يكتب على الشكل $\frac{p}{q}$ حيث يرمز p و q لعددين صحيحين (والكتابة بهذا الشكل ليست وحيدة). مثال ذلك : الأعداد $\frac{1}{2}$، $\frac{2}{3}$، $\frac{7}{8}$، 5 (يكتب 5 على الشكل $\frac{5}{1}$، كما يكتب على النحو $\frac{25237}{11000}$) هي كلها أعداد ناطقة. نرمز لمجموعة الأعداد الناطقة بالحرف $\mathbb{Q}$. الملاحظ أن $\mathbb{Q}$ مجموعة أعداد تم التحكم فيها بصفة جيدة، لكنها مجموعة غير كافية لقياس كل المقادير الهندسية. وكان الإغريق قد واجهوا صعوبات طرحتها مجموعة الأعداد $\mathbb{Q}$ (مثل استحالة قياس قطر مربع طوله 1) فصُدِموا خلال تصديهم للبحث عن مفهوم العدد رغم الأعمال الدسمة التي أنجزها أقليدس Euclide (والتي جمعت في نظرية سميّت نظرية النسب*).

كيف نعرّف عددا ليس عددا صحيحا ولا ناطقا؟ عندما نجمع كمية منتهية (حتى لو كانت الكمية كبيرة) من الأعداد الناطقة فإننا نحصل على عدد ناطق. مثال ذلك :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}.$$

ولم يتم البرهان على النتيجة القائلة بأن متتالية المجاميع (المنتهية) $1-\frac{1}{3}$ ، $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ ، $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ "تؤول" إلى نهاية لا تدرك أبدا وهي $\frac{\pi}{4}$ * إلا في القرن التاسع عشر، علما أن البرهان لم يكن سهلا. غير أن هذا العدد ليس ناطقا. نكتب هذه النتيجة على الشكل :

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\pm ...=\frac{\pi}{4}.$$

هذا يعني أننا نستطيع التقرب من العدد $\frac{\pi}{4}$ بالقدر الذي نريد. يسمى هذا العدد نهاية.

نتمكّن بفضل مفهوم النهاية من تجنّب مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$ لبلوغ عالم الأعداد الصماء (أي الأعداد غير الناطقة). تلك هي الطريقة التي عرّف بها عديد الرياضياتيين مجموعة الأعداد الحقيقية* (وهي مجموعة الأعداد الناطقة والأعداد الصماء) خلال النصف الثاني من القرن التاسع عشر. وهكذا يصبح العدد الحقيقي بمثابة نهاية لمتتالية أعداد ناطقة؛ ومن ثمّ يرتبط عالم الأعداد الصماء المحيّر بعالم الأعداد الناطقة الأكثر ألفة. الملاحظ أن مجموعة الأعداد الحقيقية، التي نرمز إليها بـ $\mathbb{R}$، تكمّل المجموعة $\mathbb{Q}$ وتسد ثغراتها (كل متتالية أعداد حقيقية تظل في $\mathbb{R}$ ولا تخرج منه حتى بعد المرور إلى النهاية*). ومن ثم اتضحت فكرة إنشاء مجموعة الأعداد المسماة "المتصل" أو "المستمر"* لأنه بالإمكان وضع كل الأعداد على نفس الخط (المتصل، أو المستمر).

ينبغي أن نلاحظ بأن مفهوم العدد الحقيقي قد تمّ تصوره انطلاقا من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ في حين أن إنشاءه عرّف بعد $\mathbb{R}$. وتنتج مجموعة الأعداد الطبيعية من إنشاء نظري متين أنجز عام 1899 على يدي جيوزيبي بيانو

Giuseppe Peano (1858-1932) متأثرا بأعمال ريتشارد ديدكيند Richard Didekind (1831-1910). وتتشكل $\mathbb{N}$ من نقاط منعزلة (الأعداد الطبيعية)، ولذا تسمى "المنقطع" أو المتقطّع"* خلافا لـ"لمتصل" (مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$).

تجنب اللانهاية الفاعل

كان الرياضياتيون – وبوجه خاص برنهارد ريمان Bernhard Riemann (1826-1866) – قد حسنوا بفضل مفهوم النهاية تقنية حساب المساحات والحجوم بالموازاة مع أعمالهم الرامية إلى تعريف العدد. وهكذا أسسوا "نظرية الحساب التكاملي". كما سمح مفهوم النهاية بتجنّب الغوص في اللامتناهيات الصغر. فبدل القول بأن مقدارا معيّنا لامتناهي الصغر فنحن نقول مثلا – تفاديا للتعقيد - إنه نهاية متتالية أعداد تتناقص تدريجيا.

وهكذا نزيل الطابع الماورائي للامتناهيات الصغر التي كان ليبنيتز ينظر إليها كـ " تخيّلات مفيدة للحساب" (كان يسميها أيضا "أساليب تعبيرية") لكنها كانت رغم ذلك "تخيّلات" !

يعتبر هذا المفهوم للنهاية إحدى الركائز الأساسية للتحليل الكلاسيكي الذي تمت صياغته خلال القرن التاسع عشر (وهو ما يوافق تقريبا ما ندرّسه اليوم في مادة التحليل حتى السنوات الجامعية الأولى). إلا أن الحساب اللامتناهي يجنّبنا مسألة اللانهاية الفاعل.

كان ليبنيتز متشبثا بفكرة اللانهاية الفاعل على المستوى الماورائي، ورغم ذلك ظل حذرا في ما يتعلق بالرياضيات. فهو لم يتقبّل أن يكون الكل يعادل الجزء في الكبر (مجموعة كل الأعداد الطبيعية بالنسبة لمجموعة كل الأعداد

الزوجية). والواقع أن ليبنيتز لم يكن وحيدا في هذا الموقف، بل إن جميع الرياضياتيين اصطدموا بهذه القضية.

وهكذا نجد كوشي ذاته، الذي كان من وراء تأسيس الحساب اللامتناهي، يزداد حذرا عندما يتعلق الأمر بالتعامل مع اللانهاية الفاعل المخيف. أما كانتور، الذي أشرنا إليه آنفا، فقد تجرأ على مواجهة للانهاية الفاعل مواجهة مباشرة.

نظرية رياضياتية للانهاية

كانتور أو اللانهاية ككلّ

بدأ التاريخ الرياضياتي الحقيقي للانهاية مع جورج كانتور Georg Cantor (1845-1918). ومما لا شك فيه أن رياضياتيين آخرين، أمثال بولزانو Bolzano أو ديديكند Dedekind، قد سبقوه، لكن التشبث العنيد لكانتور بموضوع اللانهاية جعله يتمكّن من صياغة مفاهيم أحدثت انقلابا في الفكر الرياضياتي. وينبغي أن نلاحظ هنا أن منهجية كانتور كانت تمزج بين التفكير الرياضياتي والإدراك الماورائي للكون. وقد كتَب في هذا السياق : " بدون قليل من الماورائيات لا يمكن، في نظري، تأسيس علم دقيق. والماورائيات هي، كما أفهمها، علم الكائن، أي ما هو موجود، وبالتالي فإنه علم الكوْن كما هو كائن وليس كما يبدو لنا."

أما ديديكند، الذي سبق كانتور، فقرّر، بعد أن لاحظ بأن المسلّمة القائلة "الكل أكبر من الجزء" ليست صحيحة في كل الأحوال ، تضييق لصلاحية هذه المسلمة. وقد تناول مسألة المجموعات بشكل أكثر شمولية من أجل تأسيس طريقة مقارنة مجموعتين فيما بينهما : تُبْنى هذه الطريقة على مفهوم التقابل*. يعتبر هذا المفهوم بالغ الأهمية في نظرية المجموعات، ولذا ينبغي أن نستوعبه منذ الآن لأن القضية المطروحة تستدعي ذلك.

نقول عن مجموعتين إنهما متقابلتان إذا تمكنّا من إرفاق كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر وحيد من المجموعة الثانية، والعكس بالعكس، أي إذا استطعنا إرفاق كل عنصر من المجموعة الثانية بعنصر وحيد من المجموعة الأولى. مثال ذلك : كنا رأينا في الفصل الثاني أن مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومجموعة الأعداد الزوجية متقابلان.

وانطلاقا من هذا المثال سنقوم بتعميم يجعلنا نصطلح على أن مجموعةً تكون غير منتهية إن كانت في تقابل مع أحد أجزائها. وبناء على ذلك سنقول من الآن فصاعدا بأن المجموعة $\mathbb{N}$ مجموعة غير منتهية لأنها تقابل، فيما تقابل، جزءا منها، وهو مجموعة الأعداد الزوجية. لنعتبر المجموعة $\mathbb{N}$ برمتها ونسمي "عدد الأعداد الطبيعية" أصلي أو عِدّة* أو قوة $\mathbb{N}$. هذه العِدّة التي نكتبها $\mathrm{card}\mathbb{N}$، رمز إليها كانتور بـ $\aleph_0$ (ونقرأ : "أَلَف صفر") علما أن $\aleph$ هو الحرف الأول في الأبجدية العبرية. وبعد ذلك نقول عن أية مجموعة يربطها تقابل مع $\mathbb{N}$ بأنها مجموعة غير منتهية عدّتها $\aleph_0$. وهكذا نلاحظ أن $\aleph_0$ بمثابة مقياس يحدد "حجم" المجموعة. يتضح على سبيل المثال، بناء عما سبق، أننا نستطيع القول إن مجموعة الأعداد الزوجية غير منتهية، وأن عدتها هي $\aleph_0$. ذلك أيضا حال مجموعة مربعات الأعداد الطبيعية، وكذلك مجموعة مضاعفات 3 ومجموعة مضاعفات 4 ... تعتبر كل تلك المجموعات من نفس الحجم. والآن، بعد أن أصبح لدينا رمز يشير إلى لانهاية صار بإمكاننا تلخيص العبارة : "مجموعة الأعداد الزوجية غير منتهية وعدّتها $\aleph_0$" في العلاقة :

$$\aleph_0 = \frac{\aleph_0}{2}$$

لأن من المفترض أن تكون في $\mathbb{N}$ مجموعة من الأعداد تمثّل ضعف مجموعة الأعداد الزوجية.

وإذا ما اتبعنا استدلالا مبنيًا على مضاعفات 3 (بدل مضاعفات 2) فإننا نصل إلى العلاقة :

$$\aleph_0 = \frac{\aleph_0}{3}$$

وهكذا دواليك. ومن ثم يتضح أنه، باعتبار أي مضاعف، نستطيع أن نجد صياغة مناسبة لعبارة ابن قرة التي أوردناه من ذي قبل : "يبدو من البديهي أن اللانهاية يمكن أن يكون أيضا ثلث اللانهاية أو ربعه أو خمسه أو أي جزء من أجزاء اللانهاية ذاته. ذلك أن الأعداد التي لها ثلث (مضاعفات ثلاثة) أعداد غير منتهية، وهي تشكل ثلث العدد بأكمله. كما أن الأعداد التي لها ربع (مضاعفات أربعة) تشكل ربع العدد بأكمله."

إن امتلاك ترميز ملائم يعبر عن اللانهاية يتيح لنا فرصة تأسيس قواعد حسابية تتجاوز قواعد الأعداد المنتهية. والملاحظ أن هذا الحساب لا يتعلق بأعداد صحيحة، بل إنه مبني على "العدد غير المنتهي" $\aleph_0$. وعليه نتحدث في هذه الحالة عن الحساب الموغل*.

إن هذه الطريقة المتمثلة في تعريف مجموعة غير منتهية كمجموعة متقابلة مع مجموعة من مجموعاتها الجزئية مفيدة على صعيدين. فمن جهة أصبح الأمر لا يتعلق بشيء قد يصبح غير منته، بل يتعلق بلانهاية معلوم، نتناوله، برمته، بدون تجزئة. وبعبارة أخرى فلسنا أمام لانهاية كامن، بل نحن نتناول لانهاية فعليا. ومن جهة أخرى، فمن الآن، لم يعد اللانهاية هو نفي المنتهي، بل العكس هو الصحيح : المنتهي هو نفي اللانهاية، إذ نقول عن مجموعةٍ إنها منتهية

إذا لم يوجد أي تقابل بينها وبين جزء منها. وهكذا يصبح "المنتهي" كأنه " اللا لامنتهي".

وخلاصة القول إن الرياضياتيين قرروا بعد ديديكند - عند مواجهة محيّرات اللانهاية التي تنكر إحدى الركائز الأساسية لعلم الرياضيات الإغريقي (القائلة إن الكل أكبر من الجزء) - النظر إلى المسألة بصفة عكسية. توجد "كلّيات" تعادل في حجمها بعض أجزائها. فليكن ذلك ! لنتعرّف بعدئذ على المجموعات غير المنتهية كمجموعات تعادل في حجمها بعض أجزائها ! هل أن الأمر يتعلق بلعبة مخادعة ذكية أو بعمل تأسيسي لرياضيات متينة البناء؟

هل اللانهاية وحيد؟

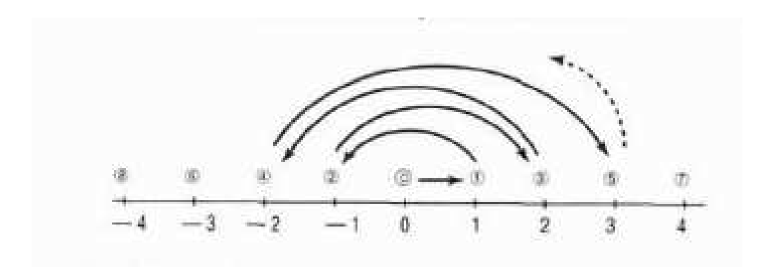
نواصل، بعد أن تبنّينا مبدأ التقابل، وضع نظرية رياضياتية حقيقية للانهاية. نعلم أن عِدّة $\mathbb{N}$ هي $\aleph_0$، وكذلك حال بعض أجزائه (الجزء المكوّن من الأعداد الزوجية، وجزء الأعداد الفردية، وجزء الأعداد المضاعفة لـ 3، ولـ4، أو لأي عدد طبيعي غير منعدم). وبصفة عامة، بدل أن نقول بأن مجموعة E غير منتهية وعدتها $\aleph_0$، نلخص العبارة ونقول إن E (غير منتهية) عدودية* أو قابلة للعد*. وهكذا تكون E غير منتهية وعدودية إذا تمكنا من البرهان على وجود تقابل بين E و $\mathbb{N}$. وبالتالي فالقول إن E عدودية يعني فقط أننا نستطيع تعداد عناصر E بواسطة الأعداد الطبيعية. وهنا يطرح السؤال التالي نفسه : هل توجد مجموعات (غير منتهية) لا يمكن ربطها بتقابل مع $\mathbb{N}$، أي أن الأعداد الطبيعية لا تكفي لوصفها؟

لنعالج مجموعة من المفترض أن تكون "أكبر" من $\mathbb{N}$. نعتبر مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ الموجبة والسالبة. إنها مجموعة "أكبر" ظاهريا من $\mathbb{N}$ لأنها تحتوي $\mathbb{N}$ بالإضافة إلى الأعداد 1−، 2−، 3− 4−، ...، $-n$ ، ... وهكذا :

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}.$$

ما هي عِدّة هذه المجموعة؟ هل يساوي $\mathbb{N}$؟ يبدو ذلك مستحيلا، لكن الواقع يقول إن عِدّة $\mathbb{Z}$ هي عِدّة $\mathbb{N}$. كيف يمكن ترقيم عناصر $\mathbb{Z}$؟ نرفق 0 بـ 0 و 1 بـ 1، ثم بدل مواصلة الترقيم المألوف نغيّر الإتجاه ونرفق 1− بـ 2، ونرفق 2 بـ 3، ونرفق 2− بـ 4، ... ونتابع الترقيم على هذا النحو بإدارة وجهنا، يمنة باتجاه الأعداد الموجبة (الطبيعية)، ثم يسرة باتجاه الأعداد السالبة، تماما كما لو كنّا نتفرّج على مباراة في كرة المضرب (انظر الشكل الموالي). نبرهن بهذه الطريقة على وجود تقابل بين المجموعتين $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$. (يمكننا توضيح التقابل السابق بكتابة صريحة، لكن هذا لا يضيف شيئا لموضوعنا). لقد بيّنا الآن بأن $\mathbb{Z}$ عدودية، أي أن عِدّة $\mathbb{Z}$ تساوي عِدّة $\mathbb{N}$، نكتب ذلك، رمزًا، على النحو :

$$\mathrm{card}\mathbb{Z} = \mathrm{card}\mathbb{N} = \aleph_0.$$



كمية الأعداد الطبيعية تعادل كمية الأعداد الصحيحة ! توضح طريقة الذهاب والإياب بين الأعداد الموجبة والأعداد السالبة كيف برهن الرياضياتيون على أن عدد الأعداد الطبيعية يعادل عدد الأعداد السالبة : فهم يرقمون كل الأعداد الصحيحة. غير أن الترقيم يعني استعمال الأعداد الطبيعة دون غيرها، وهو ما يجعل كمية الأعداد الطبيعية تعادل كمية الأعداد الصحيحة.

نعتبر الآن مجموعة "أكبر" من $\mathbb{Z}$. لنتناول مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$. إنها تحتوي $\mathbb{N}$ لأن كل عدد طبيعي عدد ناطق (لأن العدد الطبيعي يساوي نسبة نفس العدد على 1). كما أن $\mathbb{Q}$ تحتوي $\mathbb{Z}$ لنفس السبب السابق. هل $\mathbb{Q}$ عدودية؟ أي عدّتها تساوي عدة $\mathbb{N}$؟ نعم ! الملاحظ أن البرهان على ذلك، أي إنشاء تقابل بين $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{N}$، أمر أكثر صعوبة من إثبات وجود تقابل بين $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$. يتبع البرهان طريقة تعداد متعرّجة (انظر الشكل الموالي). وهكذا :

$$\text{card}\mathbb{Q} = \aleph_0.$$

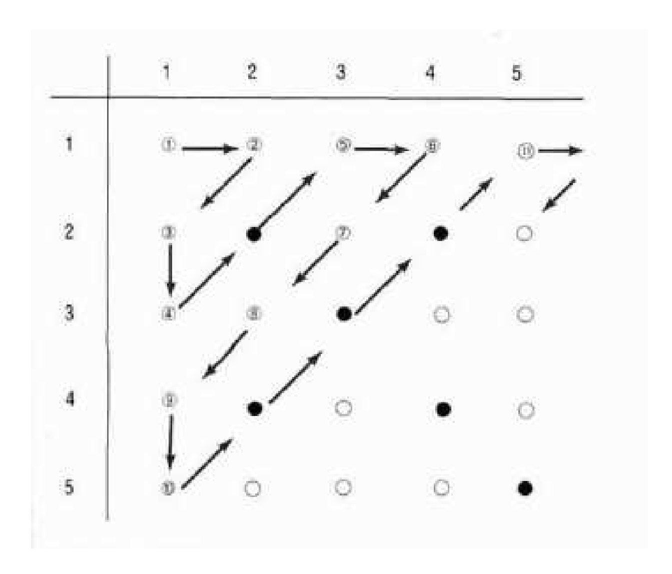
هل يمكن تصديق – كما تصور ابن قرة قبل عدة قرون – بأنه لا يمكن أن يكون لانهاية أكبر من لانهاية آخر، وأن كل المجموعات لها حجوم تعادل حجم $\mathbb{N}$؟

الآن نستطيع القول بأن المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ لها نفس "الحجم" ونفس "المستوى" رغم اختلافها. لكن مواصلة دراسة مجموعات تزداد ضخامة تجعلنا ندرك "مستوى" أعلى ! دعنا نسرع ونعتبر مجموعة كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$: الأعداد الطبيعية والصحيحة (السالبة) والناطقة والصماء (أي الأعداد التي يمكن كتابتها على شكل نسبة عددين صحيحين مثل $\sqrt{2}$، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{17}$ ، π ، ...). لقد سبق أن شرحنا بإيجاز كيف أنشئت هذه المجموعة خلال

القرن التاسع عشر. وما نريد القيام به هنا هو إثبات أنه لا يمكن إنشاء تقابل بين $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$. ومنه سنستنتج أن $\mathbb{R}$ ليست عدودية. نقول إن $\mathbb{R}$ مجموعة غير منتهية وغير عدودية (أو غير قابلة للعد)، ونضع $\text{card}\,\mathbb{R} > \text{card}\,\mathbb{N}$ (نذكّر أن $\text{card}\,\mathbb{N} = \aleph_0$).

إن المجموعة $\mathbb{N}$ لا تكفي لترقيم كل عناصر $\mathbb{R}$، ولذا فالمجوعة $\mathbb{R}$ ليست من نفس مستوى المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$. ومن ثمّ، فعندما نتعدى عتبة $\mathbb{Q}$ لبلوغ $\mathbb{R}$ نكون قد تجاوزنا "درجة" في دراسة اللانهاية. بمعنى أننا نظل في نفس المستوى ما دمنا نتعامل مع مجموعات بمقدورنا أن نقيم تقابلا بينها وبين $\mathbb{N}$؛ وعندما ننتقل إلى $\mathbb{R}$ فإننا نقفز إلى مستوى أعلى.

دعنا نبرهن، ليس بأن عِدّة $\mathbb{R}$ أكبر تماما من عِدّة $\mathbb{N}$ فحسب، بل أن مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين 0 و 1، التي نرمز إليها بـ $[0,1]$، ليست عدودية، أي أن عدّتها لا تساوي $\aleph_0$.



الطريقة "المتعرّجة". لإثبات أن كمية الأعداد الطبيعية تعادل كمية الأعداد الناطقة، رقّم الرياضياتيون، بواسطة $\mathbb{N}$، كل الأعداد الناطقة بفضل الطريقة "المتعرّجة" المبيّنة أعلاه. وهكذا فالكسر $\frac{3}{2}$ يحمل رقم 7، بينما يحمل الكسر $\frac{1}{5}$ الرقم 10. ومن ثمّ فكمية الأعداد الطبيعية تعادل كمية الأعداد الناطقة.

وقبل الشروع في تقديم البرهان، من المفيد أن نوضح بعض الأمور المتعلقة بكتابة الأعداد. إنه بالإمكان أن نكتب عددا ناطقا، في جميع الأحوال، على شكل متتالية أرقام عشرية غير منتهية الحدود، لكنها دورية (قد نجد فيها رقما واحدا يتكرر) تتكرر فيها لانهائيا مجموعة أرقام ابتداء من رتبة معينة. فعلى سبيل المثال، نعلم أن :

$$\frac{1}{3} = 0,3333333...$$

(الرقم 3 يتكرر لانهائيا ابتداء من الرتبة الأولى). كما أن :

$$\frac{253237}{11000} = 23,021545454545...$$

(الدورة 45 تتكرر لانهائيا ابتداء من الرتبة الرابعة). وخلافا لذلك نلاحظ في الأعداد الصماء أن متتالية الأرقام العشرية التي تمثل عددا أصم بأنها غير دورية (لا يمكن إيجاد مجموعة أرقام تتكرر لانهائيا انطلاقا من رتبة معينة). مثال ذلك، العدد $\frac{\pi}{4}$ يكتب على الشكل $0.78539816...$. الآن أصبحنا في حالة مستعدين لتقديم البرهان.

لو كانت المجموعة $[0,1]$ عدودية لوجد تقابل بينها وبين $\mathbb{N}$. وبناء على توضيحاتنا السابقة فإن كل عدد x محصور بين 0 و 1 يمكن أن يكتب على النحو :

$$x = 0,x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 ...$$

حيث يمثّل x_1 الرقم العشري الأول، و x_2 الرقم العشري الثاني، ...

وهكذا، لو كانت المجموعة $[0,1]$ عدودية لتمكنا من ترقيم كل الأعداد المنتمية إلى $[0,1]$، أي إقامة تقابل بين $[0,1]$ و $\mathbb{N}$. وبعبارة أخرى، فإننا سنكون قادرين على كتابة :

$$[0,1] = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, ...\}$$

لنفرض مثلا أن :

$$X_1 = 0,134\ 356\ 1...$$
$$X_2 = 0,176\ 561\ 7...$$
$$X_3 = 0,645\ 913\ 9...$$
$$X_4 = 0,539\ 715\ 3...$$
$$X_5 = 0,672\ 419\ 1...$$

سيؤدي ذلك إلى تناقض بعد محاولة إنشاء عدد ينتمي إلى $[0,1]$ لا يمكن تمثيله في هذه القائمة. لننشئ عددا X يتكون فقط من الرقمين العشريين 1 و 2، وذلك باختيار مواقع هذين الرقمين طبقا للقاعدة التالية :

- الرقم العشري الأول لـ X_1 هو 1. نختار الرقم العشري الأول لـ X يساوي 2.

- الرقم العشري الثاني لـ X_2 هو 7. نختار الرقم العشري الثاني لـ X يساوي 1.

- الرقم العشري الثالث لـ X_3 هو 5. نختار الرقم العشري الثالث لـ X يساوي 1.

وهكذا دواليك : كلما نجد 1 على القطر في الرسم السابق نضع الرقم العشري 2 في العدد X. أما إذا وجدنا على القطر رقما آخر يختلف عن 1 فإننا نضع العدد العشري 1 في العدد X. وكذا نجد في هذا المثال :

$$X = 0{,}211\ 12...$$

إن هذا العدد الذي أنشأناه انطلاقا من القطر يختلف عن كل الأعداد X_i التي يفترض أنها تصف [0,1] لأنه يختلف، بفضل رقمه العشري من الرتبة i عن X_i، وذلك مهما كان i. ثمّ إنه من الواضح أن X ينتمي إلى[0,1]. وعليه نصل إلى تناقض حيث أنشأنا عددا ينتمي إلى [0,1] على الرغم من أنه لا ينتمي إلى المجموعة $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5,...\}$ في الوقت الذي افترضنا فيه أن هذه المجموعة تصف[0,1]. ذلك يعني أن الفرض الذي انطلقنا منه (وهو أن[0,1] عدودية) خاطئ : إذن [0,1] ليست عدودية.

يعرف هذا البرهان - الذي سمح بإنشاء العنصر المؤدي إلى تناقض - باسم الطريقة القطرية لكانتور*، وذلك نظرا للأسلوب المتبع في إنشاء ذلك العنصر. نلاحظ هنا بأن هذه الكيفية كثيرا ما تستعمل في الرياضيات.

أثبتنا الآن بأن عِدّة [0,1] أكبر تماما من عِدّة $\mathbb{N}$. ولذلك يمكن تأكيد وجود كمية أعداد في القطعة "الصغير"[0,1] تفوق بكثير تلك الموجودة في $\mathbb{N}$ بأكمله. فبديهي إذن أن تكون عِدّة $\mathbb{R}$ أكبر تماما من عدة $\mathbb{N}$:

$$\text{card}[0,1] > \aleph_0.$$

وبالتالي :

$$\text{card}\mathbb{R} > \aleph_0.$$

عدد غير منته من اللامتناهيات

لقد أوضحنا الآن بأن اللانهاية ليس وحيدا، وأن هناك على الأقل لانهايتين : اللانهاية الذي رمزنا له بـ $\aleph_0$، واللانهاية المرتبط بـ $\mathbb{R}$. ومن ثمّ نتساءل : هل هناك لانهايات أخرى؟ وهل عددها كبير؟

وهكذا "تولّدت" عن $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ نهايتان. والملاحظ عندما كان هدفنا إيجاد لانهاية "أكبر" من لانهاية $\mathbb{N}$، أننا انطلقنا من $\mathbb{N}$ ودرسنا على التوالي مجموعات "تزايدت" حجومها إلى أن بلغنا مجموعة لم نتمكن من إقامة تباين بينها وبين $\mathbb{N}$.

لنقدم طريقة منهجية تسمح، إنطلاقا من مجموعة كيفية E، بإنشاء مجموعة "أكبر" منها. لنبدأ باعتبار مجموعة E بسيطة جدا : $E = \{a, b, c\}$. ثم ننظر إلى مجموعة أجزائها. يمكننا في هذه الحالة تعداد كافة أجزاء E بسهولة. هناك جزء E الذي يشتمل على 0 عنصرا (أي لا يشتمل على أي عنصر)، إنه المسمى بالجزء الخالي، ونرمز إليه بـ $\varnothing$ (كل مجموعة تحمل بداخلها الجزء الخالي). هناك أيضا أجزاء E التي تشمل عنصرا واحدا، وعددها ثلاثة أجزاء هي $\{a\}$ ، $\{b\}$ ، $\{c\}$. تسمى هذه الأجزاء التي تحتوي عنصرا واحدا مجموعات أحادية. ومن بين الأجزاء الأخرى نجد تلك التي تشمل عنصرين، وعدده يبلغ أيضا ثلاثة أجزاء. هذه الأجزاء هي $\{a, b\}$ ، $\{b, c\}$ ، $\{a, c\}$. تسمى هذه الأجزاء مجموعات ثنائية. وأخيرا هناك جزء E يشمل ثلاثة عناصر، وهو وحيد إذ يساوي E ذاته، أي $\{a, b, c\}$ (كل مجموعة تحوي نفسها).

تحتوي مجموعة أجزاء E، التي نرمز إليها بـ $P(E)$، ثمانية عناصر (الحرف P في $P(E)$ يشير إلى الحرف الأول في كلمة "Partie" التي تعني "جزءا"). إذن :

$$\text{card}\, P(E) = 8.$$

قمنا آنفا بمعالجة حالة بسيطة. لنأخذ الآن حالة أعم، باعتبار مجموعة تحتوي n عنصرا. نجد حينئذ أن عدد أجزاء E يساوي 2^n، أي

$$\text{card}\, P(E) = 2^n.$$

نلاحظ أن هذه العلاقة تعطي النتيجة التي تحصلنا عليها سابقا في حالة $n = 3$.

إننا ألممنا الآن بالمسألة في حالة المجموعات المنتهية. فماذا يحدث عندما تكون المجموعات غير منتهية؟ عندما نعتبر المجموعة E غير منتهية فهل عِدّة $P(E)$ تساوي عِدّة E، هل هي من نفس المستوى، أو أنها أكبر تماما من عِدّة E؟

لقد أثبت كانتور أن عِدّة مجموعة أجزاء مجموعة غير منتهية E هي دائما أكبر تماما من عِدّة E. وهكذا، انطلاقا من مجموعة غير منتهية E كيف نستطيع إنشاء مجموعة جديدة عِدّتها (أو قواها) أكبر من عِدّة E. هذه المجموعة هي مجموعة الأجزاء $P(E)$. وبرهن كانتور بوجه خاص على أن عِدّة مجموعة أجزاء $\mathbb{N}$ تساوي $2^{\aleph_0}$ وأن هذه العدة تساوي عِدّة $\mathbb{R}$. نحن لا نود تقديم تفاصيل أسباب قيام العلاقة

$$\text{card}\mathbb{R} = 2^{\aleph_0},$$

بل سنكتفي باستعراض بعض العناصر التي تساعدنا على الإلمام بالموضوع. يمكن أن ننظر إلى كل عدد حقيقي كمتتالية غير منتهية من الأعداد الصحيحة :

. $\pi = 3.141\ 5...$ ، $\sqrt{2} = 1.414\ 213\ 562...$ ، $\frac{1}{3} = 0,333\ 333...$

وعليه نستطيع أن نرفق كل عدد حقيقي بجزء من $\mathbb{N}$، والعكس بالعكس، يمكن أن نرفق كل جزء من $\mathbb{N}$ بعدد حقيقي. مثال ذلك : نرفق بالمجموعة $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$ ، أي بمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، العدد الحقيقي $0.123\ 456\ 7...$. ينبغي أن نلاحظ بأن ما قيل لحد الآن لا يعد برهانا على أن العلاقة السابقة التي أقمناها تمثّل تقابلا. ويكمن إسهام كانتور بالتحديد في إثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية لها عِدّة مساوية لعِدّة مجموعة أجزاء $\mathbb{N}$. نعبّر عن ذلك بالكتابة الرمزية :

$$\text{card}\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}.$$

يتضح من الاعتبارات السابقة أننا بيّنّا وجود عدد غير منته من اللانهايات، إذ بمجرد اعتبار مجموعة غير منتهية E فإننا نعرِف كيف ننشئ مجموعة غير منتهية عدّتها أكبر تماما من عِدّة E حيث يكفي اعتبار مجموعة أجزاء E.

وبذلك ننشئ متتالية من الألَفَات (أي $\aleph$) المختلفة مثنى مثنى :

$$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \aleph_3 \quad \aleph_4 ...$$

وهكذا أصبحنا أمام عدد غير منته من اللانهايات مرتبة وفق مستوياتها وتسلسلها. وحتى نرى بوضوح هذه المتتالية يمكننا مقارنتها من خلال وضع سلّم. فبعد سلّم تورلس Törless الذي أشرنا إليه في المقدمة، ها هو سلم كانتور. يوافق المستوى الأول $\aleph_0$ اللانهاية العدودي، وهو اللانهاية "الأقرب من المنتهي". ويوافق المستوى الثاني $\aleph_1$ اللانهاية "الأقرب إلى $\aleph_0$" ... تتمثّل دراسة عِدّة مجموعة في إرفاقها برقم يحدد مستواها حيث يمكن أن نقيم تقابلا بين أية

مجموعتين من نفس المستوى. وعليه يمكن القول إن الأمر يتعلق، أساسا، بعمل تصنيفي للمجموعات يشبه ذلك الذي يقوم به الديموغرافيون عند مقارنة المدن وتصنيفها وفق سلّم معيّن (مدن متعددة الأقطاب، مدن كبيرة، مدن متوسطة، ...) مع اختلاف ليس بسيطا، وهو أن الرياضياتي يصنف مجموعات، تكون في معظم الأحيان غير منتهية لأن ممارسته اليومية تستدعي التعامل مع هذا النوع من المجموعات. لقد بدأنا نشعر بالغثيان بسبب سلم الألِفات!

لنعد الآن إلى المجموعة $\mathbb{R}$ التي نعرف أن عدّتها (أو قوتها) أكبر من عِدّة $\mathbb{N}$. ماذا يحدث لو نعتبر جزءا "صغيرا" من $\mathbb{R}$، مثل قطعة مستقيمة؟ لقد أثبتنا أن $\text{card}\ [0,1] > \aleph_0$ و $\text{card}\ \mathbb{R} > \aleph_0$. والآن أصبح من حقنا طرح السؤال التالي : هل $\text{card}\ [0,1]$ "أصغر" فعلا من $\text{card}\ \mathbb{R}$، ذلك أننا صرنا نتوقع كل المفاجآت!؟

الواقع أنه من السهل إثبات تساوي عِدّتيْ $[0,1]$ و $\mathbb{R}$. يعني ذلك أن كمية أعداد $\mathbb{R}$ لا تتجاوز كمية أعداد $[0,1]$ إذ بمقدورنا إقامة تقابل بين المجموعتين.

نحن على وشك فقدان الصواب

كان كانتور قد تساءل في يناير 1874 بمدينة آل Halle الألمانية عما إذا كان من الممكن إقامة تقابل بين شكل مربع وأحد أضلاعه، أي هل كمية النقاط في المربع تساوي كمية نقاط أحد أضلاعه؟ وكان كانتور يعتقد أنه أجاب بنعم على هذا السؤال، لكنه ظل مضطربا أمام هذه النتيجة المحيّرة. ومن ثمّ راسل ديديكند، الذي أصبح حافظ سره في حقل الرياضيات، قائلا : "أرجو

أن تعذروا تحمسي بخصوص هذه القضية، وكثرة الاستنجاد بطيبتكم وجهدكم. إن ما أبلغتكم إياه مؤخرا كان بالنسبة لي غير متوقع وجديد لحد جعلني لن أشعر بالارتياح الفكري، يا صديقي الكريم، ما لم أطلع على رأيكم في مدى صحته. وطالما لم تشاطروني الرأي فإني سأظل أردّد : 'إني أرى ذلك لكني لا أصدقه'. وعليه ألتمس منكم إرسال بطاقة بريدية تخبرونني فيها متى يمكنكم الانتهاء من تقييم تلك النتيجة، وهل أستطيع الاتكال عليكم في تلبية طلبي الذي لا شك يمثّل مطلبا مُجْهِدا."

ولم ينتظر كانتور رد ديديكند سوى بضعة أيام إذ أجابه هذا الأخير من مدينة برونسويك Brunswick يوم الثاني من يوليو قائلا : " لقد أعدت النظر مرة أخرى في برهانكم، ولم أعثر فيه على أية ثغرة؛ أنا واثق بأن مبرهنتكم الهامة صحيحة وأهنئكم عليها." (انظر البرهان المختصر في الملحق).

وهكذا تبيّن أن هناك تقابلا بين المربع وأحد أضلاعه! يمكن أن نلخص ذلك في صيغة حسابية (موغلة)، وهي:

$$\left(\text{card }[0,1]\right)^2 = \text{card }[0,1]$$

لأن مساحة المربع تساوي مربع طول الضلع. وعليه فمن الجائز أن نتصور بأن هناك $\left(\text{card }[0,1]\right)^2$ نقطة في المربع $ABCD$ حيث إن هناك كمية نقاط في الضلع AB تعادل $\text{card }[0,1]$.

إنه من الغريب أن نكتشف بأن عدد النقاط في المربع لا يزيد عن عدد النقاط المتواجدة على أحد أضلاعه، وهو ما يجعلنا ندرك مغزى عبارة كانتور : " إني أرى ذلك لكني لا أصدقه." وكان كانتور مندهشا ليس من اكتشافاته المتعلقة بمجموعات النقاط فحسب بل كان أيضا يقف محتارا أمام سلّم الأَلِفَات:

$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \aleph_3 \quad \aleph_4 \quad \aleph_5 \quad \aleph_6 \ldots$

هل تغطي هذه المتتالية جميع اللانهايات؟ هل هناك لانهايات أخرى غير ممثلة في هذه القائمة؟ لقد أمضى كانتور حياته في محاولة إثبات أن عِدّة $\mathbb{R}$ (التي تسمى عادة بقوة "المتصل" أو "المستمر") هي أول عِدّة تلي عِدّة $\mathbb{N}$، وهذا يعني باللغة الرمزية :

$$\text{card } \mathbb{R} = \aleph_1.$$

لكن كانتور لم يتوصل لأي برهان يؤكد أو يفند ذلك. تسمى الفرضية القائلة إن $\text{card } \mathbb{R} = \aleph_1$ اليوم "فرضية المتصل (أو المستمر)". إنها ذات أهمية بالغة لأن صدقها يعني أن مستوى اللانهاية الذي يلي مستوى $\mathbb{N}$ هو مستوى $\mathbb{R}$. ومن ثمّ نستنتج أنه لا وجود لمجموعة ذات قوة (أو عِدّة) محصورة بين قوتي $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ ولا تساوي إحداهما. وبعبارة أخرى، فإن قوة المتصل ($\text{card } \mathbb{R}$) يعتبر المستوى الثاني في سلم الألِفَات، علما أن أولها هو مستوى اللانهاية العدودي ($\text{card } \mathbb{N}$). وقد أصيب كانتور بانهيار عصبي من جراء فشل بحوثه في محاولة البرهان على صحة فرضية المتصل والتهجمات المتكررة عليه من قبل بعض الرياضياتيين، مثل ليوبولد كرونكر Leopold Kronecker (1823-1891) الذي اتهمه بإفساد فكر الشباب. فدخل المستشفى، ثم قرّر التوقف عن تدريس الرياضيات ليتجه إلى الفلسفة. وترك باب الرياضيات مغلقا خلال حوالي 12 سنة وانكب على دراسة مسائل دينية وفلسفية تتناول وجود اللانهاية الفاعل بالاعتماد على نصوص يعود تاريخها إلى القرون الوسطى. واهتم أيضا بالمسائل الأدبية : هل كان فرنسيس باكون Francis Bacon هو مؤلف مسرحيات شكسبير؟ وخلال تلك الفترة لم يعد يهتم بالتقابلات والألِفات مفضلا الانشغال بأعمال شكسبير. ورغم ذلك فتأملاته جعلت أفكاره تنضج ببطء.

وفي عام 1897 أصدر كانتور عرضا جديدا بعنوان "إسهامات في تأسيس نظرية المجموعات الموغلة". وكان هذا النص أكثر منهجية ومتانة. ففي قالب جديد، استأنف مراسلته الثرية مع ديديكند قائلا " أود أن نبقى على اتصال دائم ... لقد جعلتني مسألة باكون-شكسبير الآن هادئا هدوءًا كاملا؛ بعد أن ضيعت من جرائها الكثير من الوقت والمال." كان ذلك رجوعا قويا إلى الرياضيات من قبل كانتور. فبعد أن حرّكته قضية "المتصل" (المتعلقة بوجود لانهاية بين لانهايتي $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$) حان موعد إبراز المحيّرات التي ستهز أركان نظريته.

أزمة في الأساس

كانت نظرية المجموعات، التي أتى بها كانتور، ترمي إلى وضع الرياضيات المعروفة آنذاك على أسس متينة. وقد سمحت في آخر المطاف بإدراك كائنات غير منتهية مخيفة، لكنها تستعمل بصورة عادية لدى الرياضياتيين (مثل مجموعة كل الدوال). وفي عام 1897، وهو تاريخ تبني نظرية المجموعات لكانتور، أحدث سيزار بورالي- فورتي Cesare Burali-Forti، عبر التعرض إلى محيرة، ما يعرف منذ ذلك الوقت بـ "أزمة في الأسس" : توجد مجموعات تسمى مجموعات محيّرة* تنطوي على عناصر تنتمي ولا تنتمي، في آن واحد، إلى تلك المجموعات.

والواقع أن التعريف السابق للمجموعة كما قدمه كانتور يقول إن "المجموعة تجمّع لكائنات واضحة التمايز حدسيا وفكريا"؛ وهذا التعريف يفتقد إلى الدقة مما جعله يواجه صعوبات عندما تعلق الأمر بفئة من المجموعات. وقد سمحت تلك الأعمال بالتوجه بخطوات ثابتة نحو ما يمكن أن نسميه "توحيد الرياضيات"، وهذا ببَسْط مفهوم المجموعات على كافة

الرياضيات الحديثة. غير أن ذلك لم يزل كل مناطق الظل في الرياضيات، وهذا يرجع جزئيا إلى المجموعات المحيّرة. وفي هذا السياق أعلن الرياضياتي هرمن ويل Hermann Weyl (1885-1955) عام 1921 : "ينبغي أن نفسر هذه المساوئ الواقعة في المناطق الحدودية للرياضيات كمؤشرات : من هنا يظهر الضرر المتستر والمختفي وراء الآلية الفعالة ظاهريا في الأماكن البعيدة عن تلك المناطق الحدودية، وسبب ذلك هو نقص الوعي والمتانة في الأسس التي تقف عليها كل إمبراطورية".

وحتى تُحلّ قضية هذه المحيّرات بدون فقدان المزايا المنيعة التي تمّ اكتسابها بفضل نظرية المجموعات، قام الرياضياتيون بتعميق عملية استكشاف أسس الرياضيات. وهكذا عدّلت نظرية المجموعات - التي أتى بها كانتور - من قبل رياضياتييْن آخرين (برترند روسل Bertrand Russel، إرنست زرمولو Ernest Zermolo، ...). غير أن التحسينات لم تتمكن من إزالة كل الشكوك المتعلقة بطبيعة مفهوم اللانهاية الذي اعتقدنا ذات لحظة أن التحكم فيه صار أمرا مقضيا. إن الألفاظ التي استخدمها روبرت موزيل Musil للتعبير عن خصوصيات اللانهاية تعود إلى أذهاننا هنا : "قوة غير عقلانية ومتوحشة ومدمّرة واستعادت خصوبتها. كانت موجودة هنا، حيةً، مهدّدة، ساخرة ..."

كان كانتور قد هوجم من قبل العديد من معاصريه الرياضياتيين، إلا أنه حظي بمدافع من الوزن الثقيل يتمثّل في شخص ديفد هلبرت David Hilbert (1862-1943) الذي كان مهيمنا على المدرسة الرياضياتية الألمانية خلال النصف الأول من القرن العشرين. كان هلبرت يرى من الواجب الدفاع بقوة عن "جنة الرياضيات" التي اكتشفها كانتور.

هلبرت والحل الصوري (الشكلاني)

يرى هلبرت أنه لا يجوز رفض ما قدمه كانتور، الذي هوجم بعنف، بل اضطُهِد، خلال مدة طويلة. لقد أنشأ كانتور "جنة للرياضيات"، أي إطارا نظريا مثاليا حتى يتمكن الرياضياتيون من العمل بهدوء وأمان. غير أن هذه الجنة كانت جحيما في حياة كانتور. لقد قام هلبرت ابتداء من 1890 بتطوير مفهومه الصوري* (الشكلاني) للرياضيات. وحسب هذا التصور فإن الرياضياتي يتعامل مع كائنات طبيعتها لم تتحدد. أما البراهين فيها فهي بمثابة استنتاجات تنطلق من مسلمات تعتبر، بدورها، قواعد تقوم عليها كل العمليات. وهكذا سنقول في إطار هذا النظام إن نصا (قضية) يكون صحيحا إذا لم يتناقض مع جملة المسلمات.

من الواضح أن هذا التصور يتعارض مع تصوّر إمانويل كنت Emmanuel Kant (1724-1804) الذي وصفه كانتور بأنه "شخص سفسطائي غير مستنير، له إلمام ضعيف بالرياضيات". ويرى كنت (وكذلك ديكارت) أن الاستدلال الرياضياتي لا يتمثل في سلسلة من الاستنتاجات الصورية، بل ينبغي أيضا أن ينهل من حدس الكائن. وسنرى مستقبلا كيف أن هذا التصور لقي صدى لدى رياضياتيين آخرين.

وفي نظر هلبرت يجب في البداية قطع الطريق أمام تكاثر عدد المحيّرات التي تؤثر على نظرية المجموعات تأثيرا مدمرا. والملاحظ في هذا السياق أن الحل الشكلاني بسيط : يتمثل هذا الحل في إضافة مسلمة، أو أكثر، تمنع مثل هذه "المجموعات" الصعبة المراس (وهي في الواقع "ضخمة" جدا) من أن تتواجد في نظرية المجموعات.

وبعد ذلك ينبغي مواجهة انتقادات كرونكر الموجهة ضد تصورات كانتور. ذلك أن كرونكر لا يقبل سوى الكائنات الرياضياتية التي يمكن إنشاؤها انطلاقا من الأعداد الصحيحة (الموجبة) خلال عدد منته من المراحل. وبطبيعة الحال فقد أدى به ذلك إلى رفض اللانهاية الفاعل؛ ومن ثمّ رفض السلّم الموغل الذي جاء به كانتور. كما رفض كرونكر تعريف الأعداد الصماء الذي قدمه فيرشتراس Weierstrass . وكان هلبرت معجبا بعمل كرونكر في ذات الوقت الذي يرفض فيه فلسفته. ولذلك اتبع هلبرت طريقته الخاصة من أجل تبرير الرياضيات الكانتورية : كان ذلك الهدف الأول في برنامج هلبرت الرياضياتي.

برنامج هلبرت

ينبغي على الرياضياتيين ألا يهدموا بعنف نظرية كانتور، بل عليهم أن يتأملوا بعمق في الصعوبات الخاصة بالمفاهيم الواردة فيها. وفي هذا السياق، كتب هلبرت : "لقد أصبح من الضروري تقديم توضيح نهائي لطبيعة اللانهاية، ليس للفائدة الخاصة المرتبطة بجملة من فروع العلم فحسب، بل دفاعا عن شرف الإدراك البشري ذاته. لقد حرّك اللانهاية منذ قديم الزمان مشاعر الإنسان أكثر مما حركها أي شيء آخر، وكان اللانهاية محفزا ومثرِيًا للفكر أكثر مما فعلته جل الأفكار الأخرى. غير أن مفهوم اللانهاية يتطلب، أكثر من أي مفهوم آخر، توضيحات ..."

ولا شك أن مفهوم اللانهاية هو الذي أنار هلبرت عندما اقترح في برنامجه (عام 1925) البحث عن طريقة منهجية تحوّل كل برهان يعتمد على اللانهاية (برهان "لانهاياتي"*) إلى برهان يستند فقط على استدلالات لا يظهر فيها اللانهاية (برهان "نهاياتي"*). كانت محاولات هلبرت تعتمد على مفهومه

الصوري للرياضيات لتحقيق حلم ليبنيتز القديم الذي كان يرمي إلى تأليل حقيقي للذكاء.

وقد اقترح هلبرت، تلبية لرغبة ليبنيتز، التحكم في اللانهاية باللجوء إلى عدد منته من العمليات والمسلمات. فهو يقترح أولا البرهان على أن جملة المسلمات (بعدد منته) التي تعرّف الأعداد الحقيقية لا تتضمن تناقضات*، أي أنه لا يترتب عنها وجود نص يكون صحيحا وخاطئا في نفس الوقت. بل يذهب هلبرت إلى أبعد من ذلك : لما كان من الممكن اعتبار الأعداد الحقيقية كنهايات متتاليات مؤلفة من الأعداد الناطقة (انظر ص 32 ...)، وبما أن الأعداد الناطقة تمثّلها كسور من الأعداد الصحيحة فإن القضية تردّ إلى عمليات حسابية تتعلق بالأعداد الصحيحة. وهكذا فإن تبرير "وجود" ℝ يتم بالبرهان على أن جملة المسلمات التي تؤسس حساب الأعداد الصحيحة ليست نظاما متناقضا.

كان هلبرت قد صاغ الأسئلة المطلوب حلها (ضمن 23 مسألة) في صائفة 1900 بباريس أثناء المؤتمر الدولي الثاني للرياضيات فاتحا بذلك بابا واسعا أمام رياضياتيي القرن العشرين. وقد مثّلت قضية "المتصل" ("هل يوجد لانهاية بين لانهايتي ℕ و ℝ؟") وعدم تناقض الحساب أولى المسائل المطروحة من قبل هلبرت. كيف أجاب رياضياتيو القرن العشرين عن هذه المسائل؟

لانهاية لا يقبل أبدا الترويض

ستقدم الإجابة في مرحلتين من قِبل رجلين. فقد برهن النمساوي كورت غودل Kurt Gödel (1906-1978) عام 1931 على أنه إذا كانت هناك نظرية مسلماتية * ثرية بشكل يجعلها تحوي البنية الحسابية للأعداد الطبيعية، أي نظرية تمتلك المسلمات التي تعرّف ℕ (بمعنى احتواء كافة النظريات

الرياضياتية، تقريبا)، فإننا نستطيع دوما إيجاد قضية لا يمكن استنتاجها من المسلمات وفي نفس الوقت لا تناقضها.

تثبت نتيجة غودل أنه توجد في كل نظرية رياضياتية (شريطة - كما أسلفنا – أن تحوي المسلمات المؤسِسة لحساب الأعداد الصحيحة) قضايا لا يمكن إثبات صحتها ولا تفنيدها. توصف تلك القضايا بأنها غير قابلة للبت*. الملاحظ أن الرياضيات تفقد بذلك قاعدتها الثنائية (الصواب أو الخطأ دون سواهما) وتثرى بإمكانية جديدة، وهي إمكانية "عدم قابلية البت". وهذا يعني أنه يحدث أحيانا أن نكون أمام وضعية لا يمكننا البت فيما إذا كانت قضية معيّنة صحيحة أم خاطئة. فهل فرضية المتصل قضية غير قابلة للبت؟ وبعبارة أخرى، هل يوجد لانهاية يتوسط لانهايتي المجوعتين $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ ؟

لقد أثبتت أعمال غودل عام 1938 وبول كوهين Paul Cohen عام 1963 بأن فرضية المتصل من بين قضايا نظرية المجموعات غير القابلة للبت : يستحيل تأكيد أو نفي صحة هذه القضية.

وهكذا أنهى غودل وكوهين التساؤلات التي كانت مطروحة خلال عديد السنوات حول فرضية المتصل، والأهم من ذلك أنهما فتحا آفاقا جديدة أمام الرياضيات. وهنا ينبغي الإشارة إلى أنه من الممكن أن تتطور نظرية رياضياتية وأن تثرى في تفرعاتها وتشعباتها البالغة التعقيد التي تكون أحيانا غير متوقعة. يكفي أن ندلي بفرضية تتعلق بـ"قوة المتصل" (هل هذه القوة في المستوى الثاني أو الثالث أو ذات مستوى n في سلّم الألِفات؟ أو أنها لا تنتسب إلى تلك المستويات؟) فنغوص في نظريات رياضياتية تختلف عن بعضها البعض. ومن ثم تصبح تلك النظريات، مع غودل وكوهين وآخرين، نظريات مضللة : إذ يمكننا في جميع الأحوال سلوك طريق جديد في هذه المتاهات والذهاب نحو العديد

من الرياضيات الجديدة المتفاوتة في الأهمية. وهكذا تصبح الرياضيات – حسب التعبير الوارد في عنوان قصة قصيرة لجورج لويس بورجس Jorge Luis Borges – "حديقة ذات طرقات متشعبة".

والملاحظ أن القرن العشرين قد وضع حدا للأوهام الجميلة إزاء الرياضيات التي كانت سائدة حتى عام 1925، حيث لم يكن هلبرت يخشى آنذاك من التأكيد بأن "الهدف من نظريتي هو التأسيس بصفة نهائية للطرق الرياضياتية."

وكما سبق أن أشرنا فإن أعمال غودل تبيّن استحالة وضع أية قضية في خانة الصواب أو الخطإ دون سواهما، وذلك حتى في الحساب على الرغم من أنه أنشئ انطلاقا من عدد منته من المسلمات. ومن دلالات هذه الوضعية أنه من الصعب التحكم في اللانهاية بواسطة عدد منته من المسلمات : إن اللانهاية لا يقبل الترويض. ترويضه صار من الآن فصاعدا أمرا مستحيلا.

أبرز المفاهيم

أساس : عدد يستخدم لتعريف نظام عدّ. الأساس العشري هو الأكثر استعمالا، غير أننا نستخدم أسسا أخرى : الأساس 12 (السنة تتكوّن من 12 شهرا)، والأساس 60 (للزوايا) والأساس 2 في المعلوماتية (يسمى أيضا نظام 0 و 1 أو النظام الثنائي).

الانتقال إلى النهاية : لنوضح هذا المفهوم بواسطة مثال. نعتبر متتالية الحدود 1 ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{n}$ ... بقدر ما يكبر n بقدر ما يصغر $\frac{1}{n}$: نقول إن المتتالية $\frac{1}{n}$ تؤول إلى الصفر عندما يؤول n إلى لانهاية. وهذا على الرغم من أن كل حدود المتتالية غير منعدمة. لقد سمح هذا المفهوم، المسمى بالانتقال إلى لانهاية، لرياضياتيي القرن التاسع عشر بتعريف مجموعة الأعداد الحقيقية تعريفا متينا. ذلك هو تعريف $\mathbb{R}$ الذي لا زال ساري المفعول إلى اليوم.

البرهان اللانهايوي : برهان يستخدم مفهوم اللانهاية، وبوجه خاص طرق كانتور Cantor.

البرهان النهايوي : برهان لا يلجأ لاستعمال مفهوم اللانهاية.

التحليل غير المعياري : نظرية رياضياتية طوّرها أبراهام روبنسون Robinson، ثم إدوارد نلسون Nelson خلال الستينيات من القرن العشرين. وهي تميّز بين رتب كبر مختلفة في مجموعة الأعداد الطبيعية والحقيقية. وتقدم تصورا آخر لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ يختلف عن ذلك الذي بني بواسطة مفهوم النهاية (انظر "الانتقال إلى النهاية").

التقابل : يربط التقابل مجموعتين حينما يصل كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر من المجموعة الثانية، ويكون هذا العنصر وحيدا؛ وبالعكس، يربط هذا التقابل كل عنصر من المجموعة الثانية بعنصر وحيد من المجموعة الأولى. مثال ذلك : هناك تقابل بين مجموعة الدول ومجموعة عواصمها (على الأقل من الناحية النظرية لأن هناك مدنا قانونها غير واضح!).

الجزء العشري : يمثل العدد عموما بالنسبة للآلة (الحاسبة أو الحاسوب) بجملة من الأرقام المميّزة، تسمى الجزء العشري، نضربها في أساس مرفوع بأسّ معيّن. مثال ذلك : إذا تكوّن الجزء العشري من 6 أرقام ضمن الأساس 10 فإن العدد e يكتب $0,271\,82 \times 10^1$ أو $2,718\,28 \times 10^0$.

الحدسية : فلسفة رياضياتية تفضل الحدس على الاستدلال.

الحساب التكاملي : فرع من الحساب اللامتناهي يهدف إلى إجراء حسابات تتعلق بالأطوال، والمساحات المحاطة بالمنحنيات، والحجوم، ...

الحساب اللامتناهي : فرع الرياضيات الذي يضم الحساب التفاضلي والحساب التكاملي. وهو يتناول الكميات اللامتناهية الصغر.

الخوارزميات المتوازية : في لغتنا اليومية فمعنى "العمل بالتوازي" تنفيذ عدة مهام في نفس الوقت من أجل الإسراع في الإنجاز. ونجد في الرياضيات ذات الفكرة : نحاول تصميم خوارزميات تقوم بعدة عمليات في آن واحد بهدف كسب الوقت في الحسابات. تعتبر الخوارزميات المتوازية أحد مواضيع الدراسة الأكثر إغراء في رياضيات اليوم.

الخوارزمية : سلسلة منتهية من القواعد التي ينبغي تطبيقها، وفق ترتيب معين، على عدد منته من المعطيات للوصول، خلال عدد منته من المراحل، إلى النتيجة المرجوة، وهذا بشكل مستقل عن المعطيات.

الدالة المستمرة : دالة بحيث يحدث كل تغيّر طفيف في المتغير تغيرا طفيفا في قيمة الدالة.

الرابط : يتناول المنطق مسألة صلاحية الاستدلال. ويتألف الاستدلال من سلسلة قضايا متواصلة فيما بينها بروابط. ولا يعتبر المنطق الكلاسيكي سوى الروابط "و" ، "أو" ، "لا" ، "يستلزم". أما المنطق الحدسي والمنطق الخطي فيُدخِلان روابط أخرى.

الرياضيات الإنشائية (البنائية) : هي رياضيات تقترح إنشاء الكائنات التي تتحدث عنها بفضل خوارزميات. يعتبر الرياضياتيون الشكلانيون أن "الوجود" يعني "عدم التناقض من مسلمات النظرية". أما الإنشائيون فلا يعتبرون ذلك كافيا ويقولون إن "الوجود" يعني "المقدرة على الإنشاء بواسطة خوارزمية". وهناك عدة مدارس أوضحت هذا المذهب الرياضياتي : مدرسة بيشوب Bishop الأمريكية، مدرسة ماركوف Markov الروسية، ...

الشكلانية (الصورية) : فلسفة رياضياتية تعتبر أن الرياضياتي يتعامل مع كائنات طبيعتها ليست معروفة. والبراهين لا تمثل سوى استنتاجات بحتة انطلاقا من مسلمات، صممت في شكل قواعد للنظام. وهكذا، نقول عن نص، في هذا النظام، إنه صحيح إن لم يكن متناقضا مع نظام المسلمات.

طريقة إفناء الفرق، أو طريقة القدماء : طريقة طوّرها أرخميدس من أجل مقارنة المساحات.

العدد π : أدى هذا العدد إلى ظهور العديد من الأعمال. وكان البرهان على هذا العدد أصم من إنجاز الرياضياتي جوهان هنريش لمبير Johann Heinrich Lambert عام 1768. غير أن π أسوأ من أن يكون أصم. إنه متسام ! وهذا يعني بأنه ليس جذرا لأي كثير كثير حدود معاملاته أعداد صحيحة. والرياضياتي الذي برهن على تسامي π هو الألماني فرديناند فون ليندرمن Ferdinand Lindermann عام 1882. ولذا فالعدد π بعيد عن أن يكون ناطقا. وعليه، فلا خيار لنا عند تناوله سوى اعتبار قيمة تقريبية له. وهناك موضوع آخر يعنى بدراسة هذا العدد: تعيين أرقامه العشرية. وكانت أول محاولة جادة لشارب Sharp عام 1699. وقد حسب، بمساعدة هللي Halley، 72 رقما عشريا، منها 71 رقما سليما. وفي عام 1706 قام ميشين Méchin بتعيين 100 رقم بدقة. ثم عيّن وليم شنكس William Shanks عام 1873 كمية من الأرقام العشرية بلغ عددها 707 رقما (تكوّن الأرقام العشرية للعدد π في قصر الاكتشافات بباريس صورة جدارية دائرية). ولسوء الحظ فإن عدد الأرقام السليمة حسابيا يساوي 528 رقما. وفي عام 1996 حصل الياباني يازومازا كنادا Y. Kanada على أزيد من 6 ملايير رقما عشريا، وهناك نتائج حديثة جدا تنبئ ببلوغ أرقام قياسية أخرى.

العدد "الكامل" : انظر "العدد الصحيح". يعني أحيانا، حسب السياق، العدد الطبيعي.

العدد : مرتبط بسياق الكلام، عندما نتحدث عن عدد فنحن نشير إلى عدد طبيعي أو صحيح أو ناطق أو أصم أو حقيقي.

العدد الأصم : عدد لا يمكن كتابته كنسبة عددين صحيحين. مثال ذلك : $\sqrt{2}$ ، π.

العدد الجبري : يكون عدد جبريا إن كان جذرا لكثير حدود معاملاته أعداد صحيحة. وبعبارة أخرى، يكون α عددا جبريا إن تمكنا من إيجاد أعداد صحيحة a_0 ، a_1 ، ... ، a_n بحيث :

$$a_n\alpha^n + ... + a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

مثال ذلك : العدد $\frac{5}{6}$ جبري لأنه حل للمعادلة $6x - 5 = 0$. كما أن العدد $\sqrt{17}$ جبري لأنه حل للمعادلة $x^2 - 17 = 0$. يسمى كل عدد غير جبري عددا متساميا.

العدد الحقيقي : عدد ناطق أو أصم. نرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية بـ $\mathbb{R}$ (أو R).

العدد الصحيح (نسبي) : عندما نضع أمام عدد طبيعي الإشارة "ناقص" فإننا نحصل على عدد صحيح سالب. مثال ذلك: 5– أو 107–. تسمى المجموعة المؤلفة من الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة السالبة مجموعة الأعداد الصحيحة (أو النسبية)، ونرمز إليها بـ $\mathbb{Z}$ أو Z.

العدد الطبيعي : هو أحد الأعداد الكاملة الموجبة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، ... نرمز لمجموعة هذه الأعداد بـ $\mathbb{N}$ أو بـ N. وصاحب الإنشاء المسلّمي لهذه المجموعة هو بيانو Peano : أنشئت بناء على 5 مسلمات ومفاهيم أولية (مفهوم العدد والعدد الموالي) يمكن التعبير عنها (بلغة مألوفة) كما يلي :

* 0 عدد؛

* موالي عدد كيفي عدد (مبدأ الجمع)؛

* إذا احتوت جملة من الأعداد العدد 0، وكانت كلما شملت عددا شملت أيضا العدد الذي يليه فإن هذه الجملة تحتوي على كل الأعداد؛

* لا يمكن أن يكون لعددين مختلفين نفس العدد الموالي؛

* 0 ليس مواليا لأي عدد.

العدد المتسامي : انظر "العدد الجبري". مثال ذلك : π ، وهذا عدد متسام معطى من قبل مهلر Mahler ...7 161 415 131 112 101 789 456 0.123 (الأرقام العشرية لهذا العدد معطاة بمتتالية الأعداد الطبيعية : 1، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 ، 13 ، 14 ...).

العدد الناطق : عدد يمكن كتابته على شكل نسبة عددين صحيحين. نرمز بـ $\mathbb{Q}$ (أو Q) لمجموعة الأعداد الصماء.

العِدّة : عدد عناصر مجموعة (منته أو غير منته). نرمز بـ $\aleph_0$ لعِدّة مجموعة الأعداد الطبيعية. وبصفة أعم، نرمز بـ $\text{card}\, E$ لعِدّة مجموعة E.

كيفية (طريقة) كانتور القُطْرية : طريقة استعملها كانتور Cantor للبرهان على أن المجموعتين $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ متقابلان. ومنه ينتج أن ما بعد لانهاية المجموعة $\mathbb{N}$ يوجد لانهاية آخر، هو نهاية المجموعة $\mathbb{R}$.

القضية غير القابلة للبت : قضية لا يمكن إثباتها أو تفنيدها في إطار نظرية (مسلماتية). إننا لا نستطيع هنا الحسم، أي البتّ في صحة أو خطإ القضية.

علم الحساب : فرع الرياضيات الذي يدرس الخواص والعلاقات التى تربط

الأعداد الطبيعية أو الصحيحة أو الناطقة.

علم الحساب المُوغل : فرع الرياضيات الذي يدرس الخواص والعلاقات الرابطة بين الأعداد غير المنتهية المعرفة من قبل كانتور Cantor.

اللانهاية الفاعل : اللانهاية المصمم ككل. انظر "اللانهاية الكامن".

اللانهاية الكامن أو اللانهاية القادر : ما ليس له حد أو نهاية؛ ما هو أكبر من كل كمية من نفس الطبيعة. كانت مجموعة الأعداد الطبيعية قبل كانتور Cantor تعتبر كلانهاية كامن لأن هذه المجموعة ليست منتهية. ذلك أننا نستطيع دوما إيجاد عدد طبيعي أكبر من عدد طبيعي معطى. وبمجيء كانتور صارت مجموعة الأعداد الطبيعية لانهاية فاعل، لأنه اعتبر هذه المجموعة ككل.

المتتالية : مجموعة حدود تكتب بنفس ترتيب الأعداد الطبيعية. مثال ذلك : متتالية الأعداد الزوجية، متتالية الأعداد الأولية، ...

مبدأ الثالث المرفوع : مبدأ في المنطق الكلاسيكي يقول إن قضية A إما أن تكون صحيحة وإما يكون نفيها صحيحا. وليس هناك احتمال ثالث، ومن ثمّ أتت هذه التسمية. يعتبر هذا المبدأ أحد العناصر الأساسية في المنطق الكلاسيكي.

المتقطع : مجموعة الأعداد الطبيعية المؤلفة من عناصر منعزلة، أي منفصلة.

المجموعة العدودية : مجموعة يمكن إقامة تقابل بينها وبين مجموعة الأعداد $\mathbb{N}$. القول إن مجموعة E عدودية يعني أننا نستطيع تعداد وترقيم عناصرها بواسطة مجموعة الأعداد الطبيعية.

المجموعة المحيّرة : مجموعة تؤدي إلى محيّرات (مفارقات). كان الإنكليزي

برترند روسل Bertrand Russel (1872-1970) قد أدى به الأمر إلى اعتبار مجموعات ليست عناصر من المجموعات ذاتها (مثلا : مجموعة صفحات هذا الكتاب ليست صفحة. وعليه فلا يمكن أن تكون تلك المجموعة صفحة من الكتاب ذاته). ومن ثمّ تساءل عما إذا كانت المجموعة E، المؤلفة من كل المجموعات التي لا تمثل عناصر من ذاتها، لها معنى. إنه من الواضح بأن لا معنى لـ E، ذلك أن E لا يمكن أن تكون عنصرا من ذاتها لأنها تحتوي فقط على المجموعات التي لا تمثل عناصر من ذاتها. ومن جهة أخرى، إذا لم تكن E عنصرا من ذاتها فحسب التعريف ينبغي أن تكون E عنصرا من ذاتها. هذا تناقض. وبالتالي نرى أن E عنصر من E، وفي نفس الوقت ليس عنصرا من E. ولذا فإنه لا يمكن تصنيف E. نصِفُها حينئذ بأنها محيّرة. وكان روسل قد قدّم العديد من المجموعات المحيّرة.

المحيّرة (المفارقة) : قضية صحيحة وخاطئة في نفس الوقت. مثال : لنتخذ كقاعدة بأن الكذابين يكذبون دائما وأن الصادقين يصدقون دوما. وفي هذا السياق إذا أعلن كريتي[3] أن "كل الكريتيين كذابون"، فإن قليلا من التأمل يكفي لاستخلاص أن هذا المواطن يقول كذبا وصدقا في آن واحد ! تسمى هذه المحيرة محيّرة إبيمينيد الكريتي، وهو شخص يبدو أنه عاش في جزيرة كريت خلال القرن السادس قبل الميلاد.

محيّرة التَّثْنِيَة : نقصّ خيطا إلى قطعتين، ثم نقص إحدى القطعتين إلى قطعتين أخريين، الخ. يبيّن الحساب بأن مواصلة هذه العملية خلال عدد منته من المرات ستُبْقِي دائما قطعة (حتى إن كانت قصيرة جدا). وخلافا لذلك فعقلنا الراشد

[3] من سكان جزيرة كريت اليونانية (المترجم).

يجعلنا نقول بأنه لن يبقى شيء من الخيط بعد تكرار العملية عددا (يمكن أن يكون كبيرا) من المرات. لقد قدمت رياضيات القرن التاسع عشر حلا لهذه المحيّرة.

المستمر (أو المتصل) : لفظ يدل على مجموعة الأعداد الحقيقية. نستطيع تمثيل كل الأعداد الحقيقية بمستقيم (مستمر)، ومن ثمّ أتى هذا اللفظ.

مسلمة : فرضية أو قاعدة ننطلق منها لاستخلاص خواص منطقية بهدف بناء نظام.

المميّزة (أو **العلامة**) : ميّز عالم المنطق الألماني غوتلب فريج Gottlob Frege (1848-1925) تمييزا دقيقا بين مغزى نص ومميّزة (علامة) نص (هل النص خاطئ؟ أو صحيح؟).

المنطق الكلاسيكي : منطق من وضع أرسطو، كان في البداية وسيلة نميّز بها الصواب من الخطإ. ويدرس هذا المنطق، بناء على جملة من القواعد الشكلية، صلاحية الاستدلالات. وبدفع من غوتلب فريج أصبح هذا المنطق خلال القرن التاسع عشر دراسة عمليات شكلية بسيطة بناء على قواعد معينة. ذلك ما نقصده بمصطلح المنطق الكلاسيكي. وخلال القرن العشرين تطورت أنواع أخرى من المنطق (المنطق الحدسي، المنطق الخطي، ...).

مثال ذلك : العدد $\frac{5}{6}$ جبري لأنه حل للمعادلة $6x - 5 = 0$. كما أن العدد $\sqrt{17}$ جبري لأنه حل للمعادلة $x^2 - 17 = 0$. يسمى كل عدد غير جبري عددا متساميا.

نصف الواقعية : حركة رياضياتية مثلها الرياضياتيون الفرنسيون هنري بوانكري Henri Poincaré (1854-1912)، وإميل بوريل Emile Borel (1871-1956)، وروني بير René Baire (1874-1932)، وهنري لوبيغ Henri Lebesgue (1875-1941)، وجاك هادمار Jacques Hadamard (1865-1963). ونستخدم لفظ "نصف" للإشارة إلى أن الأمر لا يتعلق بنظرية قائمة بذاتها، كما هو حال نظرية براوور Brouwer، بل يتعلق بمجموعة أوجه نظر تصبّ في نفس الاتجاه (مع بعض الفوارق).

نظام غير متناقض : يكون نظام مسلمات غير متناقض إذا لم يولّد قضية صحيحة وخاطئة في آن واحد، أي قضية منسجمة مع بعض المسلمات وغير منسجمة مع المسلمات الأخرى.

النظرية المسلمّاتية (المسلمية) : بناء فكري ومنهجي أسس بالاعتماد على نظام مسلمات. ننطلق من المسلمات المؤِسسة فنستخلص قضايا بواسطة الاستنتاج. مثال ذلك : نظرية المجموعات، ونظرية الأعداد الطبيعية، ...

نظرية النسب : نظرية وضعها الإغريق بهدف تأسيس مفهوم قياس المقادير (الأطوال، المساحات، الحجوم). وبعد ظهور أزمة الأعداد الصماء (توجد أعداد لا يمكن كتابتها على شكل نسب أعداد صحيحة) صارت هذه النظرية تنطبق على كافة المقادير (ناطقة أو صماء). وكان لهذه النظرية تأثير كبير عبر العصور. وقد لعبت في الرياضيات الإغريقية دورا يماثل الدور الذي يؤديه تعريف الأعداد الحقيقية (المؤسسة على مفهوم النهاية) في الرياضيات منذ القرن التاسع عشر.

النظرية جنتس : نظرية أثبتت عام 1934 تسمح بالاستغناء عن اللانهاية، بقدر معيّن، من البراهين. وانعكاسات هذه النظرية مفيدة في المنطق الحدسي.

الهالة : تتألف هالة عدد، في التحليل غير المعياري، من كل الأعداد المجاورة له.

الواقعية : فلسفة رياضياتية، موروثة عن الفكر الإغريقي القائل بأن الرياضياتي يتعامل مع كائنات مجردة متواجدة في عالم على حدة، عالم مثالي، منفصل عن عالم الواقع، العالم المحسوس. والرياضياتي لا يتدخل في المعرفة، بل يكتشف ويتأمل دون أن يبتكر.

e : يؤدي هذا العدد، الذي يساوي ... 4 828 281 2,718، دورا في الرياضيات لا يقل أهمية عن العدد π. وهو يساوي نهاية $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ عندما يؤول n إلى لانهاية. وقد أثبت ليونهارد أولر أن هذا العدد أصم، وبرهن شارل هرميت Charles Hermite (1822-1901)، عام 1873، أنه متسام.

ترجمة القسم الأول من كتاب

الفيزياء واللانهاية

La Physique et l'infini,
Marc LACHIÈZE-REY & Jean-Pierre LUMINET
Flammarion, 1994

تأليف
جون- بيير لوميني Jean-Pierre Luminet
مارك لاشييز- ري Marc Lachièze-Rey

عندما يظهر في نص الكتاب لفظ ذو صلة بمصطلح متخصص وورد

في قائمة "أبرز المصطلحات" فإننا نرفقه بالعلامة *.

تقديم

> **لقد حيّرت مسألة اللانهاية الإحساس البشري أكثر من أية مسألة أخرى؛ وليست هناك فكرة أنعشت العقل البشري وخصّبته أكثر من فكرة اللانهاية. ومع ذلك، ليس هناك مفهوم لا زال يتطلب التوضيح أكثر من مفهوم اللانهاية.**

ديفد هلبرت David Hilbert

كل ما يمكن أن نتعرّف عليه بطريقة مباشرة لا بد أن يكون منتهيا. ورغم ذلك ففكرة اللانهاية تبرز كلما اشتغل فكرنا. وحسب إمانويل ليفيناس Emmanuel Lévinas فإن "اللانهاية يشير إلى خاصية تتمتع بها بعض الكميات تبدو من خلالها للفكر بأنها قادرة على التوسع إلى ما وراء كل نهاية ممكنة". لكن هل بالإمكان الالتقاء باللانهاية في الطبيعة، وفي الفيزياء التي تريد تمثيله؟ هل يعتبر اللانهاية في الكون ككائن حاضر في كل الأشياء، كبعد فعلي ومتعدد للواقع؟ أو هل هو، على العكس من ذلك، تخيّل ضروري للفكر دون أن يتمكن أي واقع فيزيائي من تجسيده؟ كانت هذه المفارقة حاضرة برمتها حتى في مؤلف "الفيزياء" لأرسطو.

لقد ظلت مسألة اللانهاية خلال أمد طويل ذات طابع فلسفي. لكن الحديث الجاد عن اللانهاية يتطلب الرجوع إلى التاريخ وإلى التطورات الحديثة للعلم. ما هي "إشكالية اللانهاية" في الفيزياء؟ تخضع جميع المقادير (الحركة، الفضاء، الزمن، الخ.) لمقياس المحدودية (فهي محدودة أو غير محدودة). غير أن الفيزياء تعتبر أن الكيانات التي تعطَى فعليًا والسياقات التي تقبل التنفيذ عمليًا

هي الكيانات والسياقات المنتهية. وهذا لا يمنعها من اعتبار مفاهيم يتدخل فيها اللانهاية إن كان في ذلك "تيسير"، إلا أنها لا تمنح لتلك المفاهيم وجودا حقيقيا : فاللانهاية يكون كامنا وليس فاعلا. وهكذا يتضح أن رجال العلم قد أبدوا خلال الحقبات التاريخية المتوالية مقاومة شديدة لفكرة اللانهاية الفاعل، دون مراعاة لعقلانية المواقف. وكان أول من اقترح إعطاء اللانهاية مكانة تعادل مكانة "المنتهي" هو الرياضياتي برنارد بولزانو Bernard Bolzano. وفي أواخر القرن التاسع عشر كانت أعمال جورج كانتور Georg Cantor حول اللانهاية الرياضياتي، التي تعتبر اليوم منطلق الرياضيات الحديثة، قد رُفِضت بقوة من قبَل العلميين. وكان كانتور يقاوم التيار منفردا حتى اختل عقله. وكان لا بد من انتظار بداية القرن العشرين ليتخذ اللانهاية - جزئيا - مكانة لائقة في الفيزياء. ومنذ ذلك الوقت صار المنتهي واللامنتهي مترافقين ضمن نفس السياق.

إن مسألة اللانهاية موضوع لا ينضب (وكيف يكون عكس ذلك !)، وهناك مؤلفون كثيرون، من جميع الاختصاصات، قد عبروا عن آرائهم في هذا الشأن. سوف لن نشير في هذا المقام سوى للأعمال التي نراها أكثر تمثيلا لتيار فكري أو لحقبة زمنية معينة.

يقدم القسم الأول – تاريخ اللانهاية – بعض مراحل "التاريخ الموازي" للانهاية في الفيزياء وعلم الكون (الكسمولوجيا). فهي تستعرض من أرسطو إلى آينشتاين مواقف نيكولاس دي كويس Nicolas De Cues وجيردانو برونو Giordano Bruno ونيوتن وبولزانو وأصحاب رأي آخرين في موضوع اللانهاية. والهدف من ذلك هو : إدراك السبب الذي جعل، في كل مرحلة تاريخية، مكانة اللانهاية في العلوم الفيزيائية مرتبطة ارتباطا عضويا بمكانته الماورائية (الميتافيزيقية).

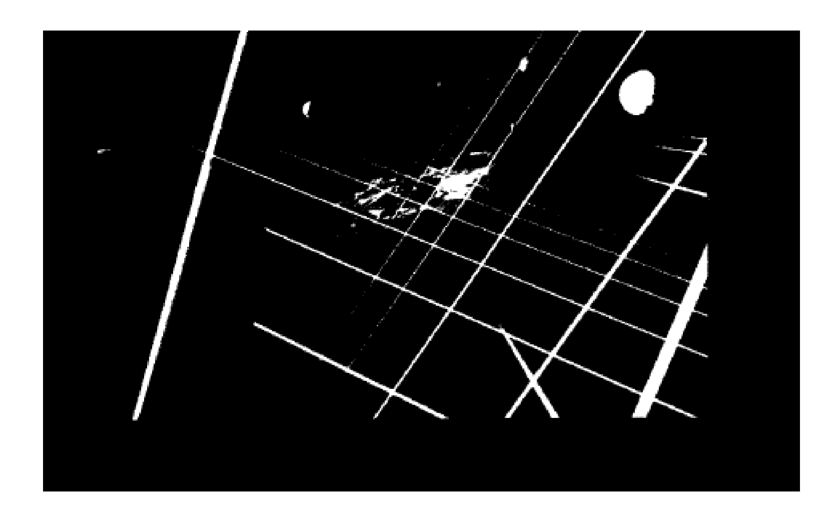
والملاحظ أن التقدم في إدراك الظواهر الطبيعية غالبا ما تواكبه إزالة اللانهايات. لكن الفيزياء الحديثة، مثل النظرية الكمومية*، وكذا نماذج الثقوب السوداء، تبرز لانهايات جديدة.

أما في القسم الثاني فسنعالج منهج إعادة التفكير في "فاعلية اللانهاية"، واللامتناهي الكبر وتوأمه اللامتناهي الصغر وذلك على ضوء النظريات المعاصرة. نريد إثبات بأن علم الكون النسبي[4]* (نماذج الانفجار الأعظم*) يظل الحقل الفيزيائي الوحيد الذي نجد فيه "اللانهاية الفاعل" (لانهاية الفضاء، خلود الزمن) ككيان لا تعتبر إزالته أمرا ضروريا. والواقع أن ذلك يعكس الموقف الفلسفي المعرفي الخاص بهذا التخصص ضمن العلوم الأخرى. أما أحدث التطورات في الفيزياء : الطبولوجيا* الزمكان[5]، إعادة المُناظَمة*، الفراغ الكمومي*، الكسوريات (الفركتال)*، نظرية الأوتار*، علم الكون الكمومي* فإن اللانهاية يلد فيها من جديد بدون انقطاع كالمرء الغامض المتعدد الوجوه.

[4] -أي العلم المرتبط بنظرية النسبية (المترجم).

[5] -الزمكان هو نحت لكلمتي الزمان والمكان. وسنستعمل بدله في عديد المواضع لفظ "الزمضاء" نحتا لكلمتي الزمان والفضاء، اعتقادا منا بأنه أقرب إلى ما سيتقدم في هذا الكتاب (المترجم).

الفهرس الكامل للكتاب



كون نيوتن. إنه كون يمتد إلى لانهاية، تعْبُره أشعة ضوئية مساراتها خطية. تتحرك فيه الكواكب والنجوم والمجرات حسب قانون الجاذبية الكونية. (الصورة مأخوذة من فيلم "الامتناهي الانحناء" من تأليف لور ديلسال Laure Delesalle، ومارك لاشييز-ري Marc Lachièze-Rey وجون- بيير لوميني -Jean-Pierre Luminet، إخراج لور ديلسال)

القسم الأول
تاريخ اللانهاية

لانهاية السماء

> لانهاية السماء، بتحدياته، ودورانه، وبتعداد كلماته ليس سوى جملة أطول قليلا من الجمل الأخرى، جملة تزيد عن غيرها إبهارا بشيء يسير.

من مؤلَف Possessions extérieures
(ممتلكات خارجية) لروني شار René Char

العالم واللانهاية

"في بداية العالم كان هناك حساء كوني لامحدود، ومتراص لا حركة فيه. وكانت السماء تحتوي على عدد غير منته من الحبّات. فهي مكونة من نفس المواد التي تتكون منها الأرض، ولم تكن تتحكم فيها الآلهة." كانت هذه العبارات، التي كتبت منذ 2500 سنة قد جعلت من صاحبها أَنَكْسَغور الكلازومينسي Anaxagore de Clazomènes (500-428 قبل الميلاد) أول عالم في التاريخ يتهم بالكفر والإتيان بالبدع. لكنه كان محظوظا أكثر من العلماء الذين أتوا بعده :

لأنه حظي بحماية أصدقاء أقوياء فبرئت ساحته وتمكن من الفرار بعيدا عن عداوة أثينا.

وهكذا كان مفهوم اللانهاية قد خلق مبكّرا جوا من الانفعالات والمجادلات. وكما هو الشأن بالنسبة لأمهات الأفكار الفلسفية فإن اللانهاية نبع من الفكر الإغريقي. كانت المدارس الأولى لعلماء وفلاسفة اليونان القديم تعرف باسم مدارس "ما قبل سقراط" على الرغم من أنها امتدت زمنيا إلى أكثر من قرنين واختلفت فيما بينها اختلافا كبيرا. وقد حاولت تلك المدارس، التي سبقت سقراط، فيلسوف أثينا الكبير، الوصول إلى تفسير عقلاني للكون (العالم) بالابتعاد بقدر المستطاع عن الأساطير : ما هي مصادر المادة وتحويلاتها وعناصرها الأخيرة؟ ما هو شكل الكون، وما هي القوانين التي تحكمه؟ وهنا نصادف نفس الانشغالات التي تطرحها في الوقت الراهن فيزياء الجسيمات* وعلم الكون*.

كان نموذج الرؤية للعالم قبل سقراط قد قدمه أَنَكْسِيمَندر الميلتي Anaximandre de Milet منذ القرن السادس قبل الميلاد. وهكذا اقترح لفظ "الأبيرون" apeiron كعنصر أولي لكل شيء. وكان المعنى الدقيق لهذا اللفظ موضع نقاش دائم، فهو يعني في آن واحد اللانهاية (اللامحدود والخالد) وغير المحدد (غير المعيّن). والملاحظ أن عالَم أنكسيمندر عالم مغلق : بمعنى أن النطاق الذي تصل إليه أبحاثنا وتقصياتنا، أي مسرح الظواهر، نطاق منته. ومع ذلك فهذا العالم منغمس في وسط غير منته، هو وسط ما يمكن اعتباره اليوم بمثابة الفضاء. وهكذا، وحسب أنكسيمندر، فالعالم منته مع أنه سابح في وسط غير منته. وقد ظلت هذه الفكرة قائمة خلال عدة قرون. وكان الأمر كذلك لدى طالس Thales، المنتسب هو الآخر إلى ميلت Milet : الوسط هو الماء،

والعالم فقاعة هواء شبه كروية تسبح في كنف تلك الكتلة السائلة غير المنتهية.

أما الذّرية* التي أسسها لوسيب Leucippe وديموقريط Democrite خلال القرن الخامس فتقترح رؤية أخرى للانهاية العالم تختلف تماما عن الرأي السابق. ولهذا المذهب الذي كان من أبرز ممثليه إبيكور Epicure (341-270 قبل الميلاد) ولوكريس Lucrèce (القرن الأول قبل الميلاد)، اعتقاد أساسي يتمثل في وجود جزء من المادة لا يتجزأ ولا يقبل التقطيع (لفظ "الذرة" باليونانية يعني "لا يقبل التجزئة")، وهو العنصر الأول في الكون. أما العنصر الأساسي الآخر فهو الخلاء (الفراغ)، الشبيه بالمسرح غير المحدود الذي تتحرك فيه الذرات. والذرات أجزاء لا تنكسر ولا تتغير، وحاضرة حضورا أزليا، ولا تختلف إلا بأحجامها وأشكالها. وأما عددها فهو غير منته، وهي تتجمع هنا وهناك فتشكل أجساما كونية في كنف الخلاء غير المنتهي.

وقد تأسس مفهوم تعدد العوالم في ظل لانهاية أصحاب مذهب الذرّية. وفي هذا السياق كتب إبيكور في "رسالة إلى هيرودوت Hérodote" النص التالي: "هناك عوالم غير منتهية تشبه عالمنا وتختلف عنه، في آن واحد. ذلك أن عدد الذرات غير منته [...] ومن ثمّ فهي تُدفَع بعيدا في الفضاء. وسبب ذلك أن غايتها – بحكم طبيعتها - هي إنشاء أو تصميم عوالم، وعليه فهي لا تستنفد كلية في عالم واحد أو في عدد محدود من العوالم، ولا في عوالم متشابهة، ولا في عوالم تختلف عن العوالم السابقة. ونتيجة لهذا الوضع فليس هناك أي حاجز يمنع وجود عدد غير منته من العوالم." وهكذا يتنبأ هذا المذهب بوجود كمّ كبير من العوالم، وسط فضاء غير منته، يعادل عددها عدد الحالات الممكنة التي توفرها الذرات. وتنْشِئ هذه الذرات الكائنات والعوالم، فهي فاعلة

السببية. ولما كان عددها غير منته فالأمر كذلك بالنسبة لعدد الحالات الممكنة التي توفرها، وكذا بالنسبة لتعدد العوالم وتنوع هذه العوالم.

وإذا كانت فرضية الذرات واسعة وخصبة فإن كسمولوجيا أصحاب مذهب الذرّية لا تزال علما هزيلا. وفي هذا السياق، يقال إن ديمقريط ذاته كان يجهل عدد الكواكب المرئية في السماء! وقد اقترح خلال القرن الرابع أفلاطون Platon وأودوكس الكنيدي Eudoxe de Cnide وأرسطو Aristote نظاما أكثر انسجاما يفسر العالم، لأنه يعتمد جزئيا على المشاهدات التي سرعان ما عوضت الكسمولوجيا الذرية. وقد أدى صدى هذا النظام إلى إدانة كل المبادئ العامة للنظرة الذرية، ولم يسترجع هذا المذهب بعض مصداقيته إلا بعد مرور وقت طويل.

الفعل أو القدرة

يعتبِر أفلاطون (428؟-347؟ قبل الميلاد) في مؤلفه "طيماوس" العالم والسماء منتهيين. ويرى أنهما محصوران، في آخر المطاف، في كرة تحيط بالعالم لا يوجد خارجها شيء. ولمن يبحث عن التناغم وعن أقصى التناظر فإن الكرة تمثل فعلا الشكل الأكمل: مظهرها لا يتغير مهما كانت الزاوية التي ننظر من خلالها للكرة. ولذا فمن "الطبيعي" أن تندرج الكرة ضمن تصميم الكون مبرزة الكمال والثبات الإلهيين.

وكان أرسطو Aristote (384-322 قبل الميلاد) هو من طرح قضية اللانهاية بمصطلحات حديثة. فقد ميّز بين اللانهاية "الفاعل" (قيْد الفعل) واللانهاية "الكامن" (ممتلك القدرة). واللانهاية "الفاعل" هو ذلك الذي يمكن إنجازه في الطبيعة؛ أما اللانهاية "الكامن" فهو مجرد نسيج خيال ضروري للفكر

إذا ما تعلق الأمر بحل مسائل معينة، غير أنه لا يوجد واقع فيزيائي يعبر عنه هذا المفهوم.

وقد رفض أرسطو في مؤلفه "الفيزياء" وجود اللانهاية الفاعل، إذ يعتبر أن اللانهاية هو ما لا يمكن الإحاطة به، وعليه فهو لا يوجد إلا في الشكل الكامن. وبوجه خاص، فإن الفضاء منته ولا وجود لشيء خارج الكرة السماوية. ومع ذلك يعترف أرسطو بضرورة وجود اللانهاية في الرياضيات : يمكن أن نضطر إلى اللجوء إليه في البراهين. وهكذا نلاحظ أن هناك ثلاث طرق تجعل مقدارا كيفيا غير منته (اللانهاية الكامن).

يمكن أن يكون مقدار غير منته من خلال التركيب. والمثال النموذجي على ذلك هو الأعداد التي يولّد جمعها أو ضربها أعدادا أكبر بدون حدود. وقد استغلت هذه الفكرة، بعد مرور ألفيْ سنة، لتكون منطلق إنشاء اللانهايات الأصلية Cardinaux*، أي منطلق نظرية اللانهايات الرياضياتية.

كما يمكن أن يكون مقدار غير منته من خلال التجزئة. مثال ذلك المادة إذ نستطيع تجزئتها إلى ما لانهاية عندما نفترض أنها متصلة فيما بينها ولا تحتوي على عناصر قابلة للتقطيع، وهذا خلافا للرؤية الذرّية. ومن هنا ولدت نظرية اللامتناهيات* التي لولاها ما كانت الفيزياء الحديثة لترى النور. وأخيرا يمكن أن يكون مقدار غير منته من خلال التركيب والتجزئة في آن واحد. ذلك هو حال الزمن، أي حركة الكرات السماوية التي لا تعرف نهاية ولا بداية.

وهكذا نرى أن كسمولوجيا أرسطو تجيب عن مسائل اللامتناهي الكبر واللامتناهي الصغر. أما اللامتناهي الكبر فينبغي إقصاؤه لأن العالم منته ولا يمكن أن يوجد شيء خارج هذا العالم. وذلك خلافا للامتناهي الصغر الذي نقبله، غير أن التجزئة اللامنتهية للمادة تجزئة كامنة وليست فاعلة.

وقد واجه أرسطو بعض المنتقدين بخصوص تصوراته المتعلقة باللانهاية، مثل أرخميدس. وحاول هذا الرياضياتي الشهير، الذي توفي دفاعا عن مدينته سيراقوسه حين حاصرها الرومان، اعتبار اللانهاية الهندسي "الفاعل" بدل "الكامن". فهو يرى تجسيدا له في "عدد حبات الرمل المبثوثة على وجه البسيطة". وطوّر أرخميدس في مؤلفه "أرِناريوس" Arenarius طرقا رياضياتية جديدة تسمح بالتعبير عن أكبر عدد ممكن باستخدام الرموز المتوفرة لديه، فبلغ هذا العدد $10^{800\,000\,000}$. وقد "برهن" على أنه أكبر من عدد "حصى الرمل الضرورية لملء كرة النجوم الثابتة" (التي تتطلب 10^{23} "فقط" حسب دعواه الحسابية).

وعلى الرغم من ذلك كانت كسمولوجيا وفيزياء أرسطو تتداول حتى بداية القرن السابع عشر، وبلغتَا ذروتهما على يدي الفلكي الأسكندراني كلوديوس بطليموس Claudius Ptolemy نحو عام 150 بعد الميلاد. وحتى تتفق المشاهدات مع كرات أرسطو فقد عوض بطليموس هذا النظام (باستثناء الكرة الأخيرة المتعلقة بالثوابت) بمجموعة دوائر إضافية : يتعلق الأمر بتركيب حركات هذه الدوائر - المسماة "دويرات فوقية" épicycles* و"متساويات الحركة" équants* - وهو التركيب الذي يعبّر عما يجري من حركات معقدة (مباشرة أو غير مباشرة) للكواكب. لكن هذا اللجوء إلى الهندسة يمرّ برفض فيزياء السماء، الذي طالب به أرسطو : القوانين الفيزيائية القائمة في الأرض لا تقوم في السماء؛ ذلك أن السماوات مقدسة وتخضع لمبادئ ثابتة في حين يخضع العالم الواقع تحت القمر للقوانين الصارمة التي تسيّر التوالد (التكاثر) والتلف.

تخوم العالم

لقد وجدت فكرة انتهاء العالم (الأرض والكواكب والنجوم) التي يتشبث بها أصحاب مذهب أنكسيمندر المليتي صدى لها في مدارس فلسفية إغريقية أخرى، مثل تلك المنسوبة إلى هيراقليط Héraclite وإمبدوقليس Empedocle و"الرواقيين" (أو "الزينونيين"). وقد تصور الرواقيون وجود دورية كونية للعوالم المتدافعة تتوالى الواحد بعد الآخر بدون انقطاع مرورا بمراحل انفجارات متفاوتة القوة. إن الفضول يدعونا إلى ربط ذلك بنماذج "الانفجار الأعظم" التي يقترحها علم الكون الحديث. غير أن هناك فارقا أساسيا بين هذا وذاك : فالإغريق كانوا يميّزون بين "العالم" الفيزيائي و"المكان" الذي يعني بلغة عصرنا "الفضاء الهندسي". فهم يعتبرون العالم (الكروي مثلا) جزءا من الفضاء الذي يضمه ويحويه، وهذا الفضاء الأخير فضاء "خارج الكون"، غير منته، وبدون مميزات فيزيائية. وعلى العكس من ذلك فإن النماذج الكونية لا تفرق اليوم بين الكون والفضاء (أو بالأحرى، بينه وبين كيان أشمل، هو "الفضاء- الزمن- المادة" الذي سنتحدث عنه لاحقا). وفي هذا السياق فقد قطع الأرسطوطاتيون – الذين لا يميزون بين العالم والفضاء المنتهيين – والذرّيون – الذين لا يميزون بين العالم والفضاء غير المنتهيين – شوطا حاسما في تطور علم الكون.

وقد واجه أنصار فكرة انتهاء العالم صعوبة أساسية : يبدو من اللازم تصور وجود مركز وحدود للعالم. وهذه الحدود يمكن أن تكون جدارا، أما الكون فهو منحصر داخل قوقع مادي كروي ربما يشكل كرة النجوم الثابتة. وهناك من ينظر للحدود على أنها حافة متدرّجة، تنتقل تدريجيا من ملكوت الفيزياء إلى ملكوت السماء أو الروح (موطن الآلهة). بينما يدعم أصحاب

مذهب أنكسيمندر الميلتي والرواقيون فرضية وجود منحدر : العالم المنتهي ذو حدود غير مادية، يحتويه خلاء (فراغ) شاسع غير منته.

وكان أرشوطاس التارنتي Archytas de Tarente، وهو من فيثاغورسيي القرن الخامس، أول من قدم محيّرة تهدف إلى البرهان على تناقض فكرة وجود حافة مادية للكون. وقد لقيت فكرته صدى كبيرا في النقاشات التي دارت حول الفضاء : "إذا كنت موجودا في طرف سماء النجوم الثابتة فهل يمكنني مد يدي أو مد عصا؟ إنه من غير المعقول أن نقول باستحالة ذلك؛ وإن استطعت فهل ما نجده وراء ذلك، جسم أم فضاء. وعليه بإمكاننا الذهاب أبعد من هذا الحد، وهكذا دواليك. وإذا وجد في كل الحالات فضاء يمكن أن نمد نحوه العصا فهذا يتطلب، بالضرورة، توسعا بدون حدود." يؤدي بنا هذا الوضع إلى اعتبار بأن ما وراء العالم، مادةً أو فضاءً، جزءٌ من العالم. ومن ثمّ لا يمكن من الناحية المنطقية أن يكون العالم محدودا دون أن تواجهنا محيّرة.

وبناء على ذلك ينبغي إقصاء صورة عالم متواجد في وسط خارجي ليس جزءا منه. وقد أعيد العمل بهذا الاستدلال من قبل مناصر النظرية الذرية الروماني لوكريس Lucrece باعتبار صورة رمي الرماح. غير أنه كان علينا انتظار ظهور الهندسات غير الأقليدية* خلال القرن التاسع عشر لحل هذا الخلاف. تمكّن هذه الهندسات من تصور فضاءات ذات خواص مختلفة عن تلك التي نتعلمها في المدرسة : مجموع زوايا مثلث لا يساوي في جميع الأحوال 180 درجة. كما أنه لا يمرّ دائما مستقيم وحيد من نقطة معطاة يوازي مستقيما معلوما ... وعلى الرغم من أن هذه الخواص بدت "فظيعة" في بداية الأمر فقد اعترف الرياضياتيون بكونها مؤسَّسَة بشكل سليم؛ واعتبرها الفيزيائيون بدورهم بأنها ربما توفّر تمثيلات أفضل للفضاء الحقيقي. وفي هذا الإطار الجديد يمكن أن

نتصور بأن الفضاء قد يكون منتهيا بدون أن يمتلك حافة، ومن ثمّ نعتبر الكون منتهيا وعديم الحدود، وهذا بدون مواجهة مفارقات.

إن هذا التصور ليس جد طبيعي، والغموض لا زال يكتنفه إلى اليوم. فعندما يحاضر أحدهم ويصف مثلا توسع الكون فغالبا ما يطرح عليه السؤال التالي : في أي شيء كيان ينتفخ حجم الكون؟ والملاحظ أن هذه الصياغة الخاطئة تزداد حدة عند إجراء مقارنة سيئة تتمثل في تشبيه توسع الكون بسطح كرة نقوم بالنفخ فيها. والجواب هو أن الكون لا يتوسع في أي كيان إذ أنه لا وجود لفضاء غيره !

معارضة أرسطو

بعد ظهور الديانات اليهودية والمسيحية والإسلامية كان لا بد من تنقيح وتعديل لانهاية أرسطو (الذي ليس هو لانهاية الله) للتعبير عن اللانهاية الإلهي.

كان الأسكندراني جون فيلوبون Jean Philopon قد أوضح، في حوالي عام 500، الصعوبات التي تثيرها الصلة بين أطروحتي أرسطو المتعلقتين باللانهاية. فمن جهة، نجد أرسطو لا يعترف باللانهاية الفاعل. ومن جهة أخرى، ليست هناك بداية ولا نهاية للزمن والحركة. وقد اقترح جون فيلوبون، ذو التوجه المسيحي، التخلي عن الفرضية الثانية، وعكف من أجل ذلك على الإتيان ببرهان نشأة العالم.

وفي أرض الإسلام كان الكندي (حوالي 800-870م) من الفلاسفة القلائل الذين ثاروا ضد خلود الكون، وهي معارضة تأتي عادة من رجال الدين وليس من الفلاسفة. كما أن هناك الفيلسوف الشهير ابن سينا (980-1037) الذي ناقش مطولا أعمال أرسطو في مؤلفه "كتاب الشفاء" مدمجا فيها عناصر من الفلسفة

الأفلاطونية الجديدة. فهو يدافع عن انتهاء المقادير الهندسية مثل الخط المستقيم، غير أن برهانه على ذلك لا ينطبق على الزمن ولا على الحركة. وميّز ابن سيناء جيدا - كما فعل أستاذه الكندي – بين المقادير الفضائية والزمنية. لكنه يوافق على وجود لانهاية فاعل، وهو لانهاية عدد الأرواح الإنسانية. وحتى يفنّد كلام القائلين بانتقال الروح من فرد إلى آخر يختتم بالقول إن الأرواح البشرية، المنفصلة عن الأجساد، تشكّل تكاثرا لانهائيا فاعلا (أي بمفهوم اللانهاية الفاعل) !

والملاحظ أن أرسطو لم يواجه معارضة حتى الآن إلا حول نقاط معينة من تصوراته للانهاية. ثم جاء رجل دين من المجموعات اليهودية في أرَغون Aragon، وهو هاسداي كرِسكاس Hasdai Crescas (1340-1412؟) وناقض حجج أفلاطون برمتها. كان كرِسكاس صاحب كتاب ديني فلسفي سماه "مصباح الله" دافع فيه دفاعا قويا عن أطروحات عدم انتهاء الكون وعن تعدد العوالم الممكنة وعن وجود خلاء فضائي، أي عن فكرة المقادير والأعداد غير المنتهية فعليا.

وقد جرت العادة خلال القرون الوسطى على التأكيد بأن الكردينال نيكولاس دي كويس (1401-1464) قال بعدم انتهاء الكون في مؤلفه De la docte ignorance (حول التباهي بالجهل). وكان الكردينال قد تأثر بنص لوكريس De la nature (حول الطبيعة) الذي عثر عليه عام 1417 في دير للرهبان. والملاحظ أن حججه الرئيسية ذات طابع ماورائي : الكون غير منته لأنه من خلق الله الذي لا يمكن أن تكون أعماله محدودة. يجب على الكون أن يعمّر بالكائنات، وعلى الأرض أن تتحرك.

غير أن الطريق إلى اللانهاية ظل محفوفا بالحواجز. وقد حافظ الكاهن البولندي نيكولاس كوبرنيكوس Nicolas Copernic (1473-1543) - الذي ذاع صيته بفضل قوله إن الأرض ليست مركز الكون - على فكرة العالم المنتهي المحتوي داخل كرة النجوم الثابتة. ولم يضف سوى أن هذا العالم شاسع ولا يمكن قياسه تاركا الكرة في ملعب الفلاسفة. ومع ذلك فقد مهّد الطريق لفكرة الكون غير المنتهي بـ"توسيع" عالم القرون الوسطى : كان نموذجه يزيد ألفيْ مرة عن عالم بطليموس، وهذه خطوة صغيرة في اتجاه اللانهاية، لكننا لم نبلغ بعد اللانهاية.

برونو Bruno أو نشوة اللانهاية

يعتبر جوردانو برونو Giordano Bruno (1548-1600)، في آخر المطاف، صاحب الكسمولوجيا غير المنتهية. "ها قد ظهر الإنسان الذي اخترق الأجواء، وعبر السماء، وتخلل النجوم، وتجاوز حدود العالم، وأسقط الأسوار الخيالية للكُرات – من أول منزلة إلى الثامنة، إلى التاسعة، إلى العاشرة، أو يزيد – وهي الكرات التي أوجدتها حسابات رياضياتية غير مجدية أو فلسفة عمياء ومبتذلة [...]. إنه الإنسان الذي استخدم مفاتيح مهارته ليفتح بأبحاثه أبواب الحقيقة التي لم نكن قادرين على اختراقها. فقد جرّد الطبيعة التي غلّفتها الأقنعة. إنه منح أعينا لحيوان الخلد، ورَدَّ البصر للعميان. [...] نحن نعلم ذلك : هناك سماء واحد، ومنطقة سماوية شاسعة حيث تحافظ البؤر الضوئية الجميلة على المسافات التي تفصلها لتضمن دوام الحياة و إعادة ظهورها."

بهذه العبارة مجّد برونو ذو الحماس الفياض الرجل الهادئ كوبرنيكوس.

لقد قدم برونو حججا معتمدا على أسس فيزيائية، وليست دينية محضة، ونشر مذهبه في كامل أرجاء أوروبا حتى حرِق حيًا من أجلها عام 1600 !

كانت كتاباته تتميز بجرأة وأصالة منقطعتي النظير. وظل فكره، الذي خانه القوم وشوّهوه، بعيدا عن إدراك معاصريه، سيما من قبل غاليليو Galelio. وكان قد أعاد فلاسفة عصر الأنوار خلال القرن الثامن عشر اكتشاف برونو من جديد وبرزت صورته الأسطورية في منتصف القرن التاسع عشر حين عارض العلم "الإيجابي"* الكنيسة بقوة. ورغم ذلك فبرونو هو، قبل كل شيء، فيلسوف استوحى فكره الكسمولوجي من مذهب الذرّية للوكريس ومن الاستدلالات الكوسمولوجية لنيكولاس دي كويس ومن أطروحة كوبرنيكوس. وقد أخذ برونو من هذا الأخير فكرة المركزية الشمسية héliocentrisme* وترتيب النظام الشمسي. لكنه رفض فكرة "الانتهاء" الكوسمولوجي لهذا النظام واحتوائه في الكرة الثامنة (كرة النجوم الثابتة). وقد سبق جوهانس كبلر Johannes Kepler وإسحاق نيوتن في رفض التقيّد الأعمى بجمال الشكل الكروي والحركة الدائرية المنتظمة.



إنجيل من القرن الثالث عشر. هل يرتبط توسع الكون باللامتناهي الكبر؟ وهل يتعلق تنظيم المادة باللامتناهي الصغر؟ توحي الصورة بأن الله يملك الإجابة عن هذين السؤالين الجوهريين. والفيزياء تقترب ببطء نحو الإجابتين (المكتبة الوطنية بفيينا، النمسا).

وتجدر الإشارة إلى أن التوجه الفكري لبرونو في ما يتعلق باللانهاية ينطلق من ملاحظة كون ما نشاهده يعتبر دائما أمرا نسبيا : فالأفق ليس سوى حافة ظاهرية تتحرك مع المشاهد.

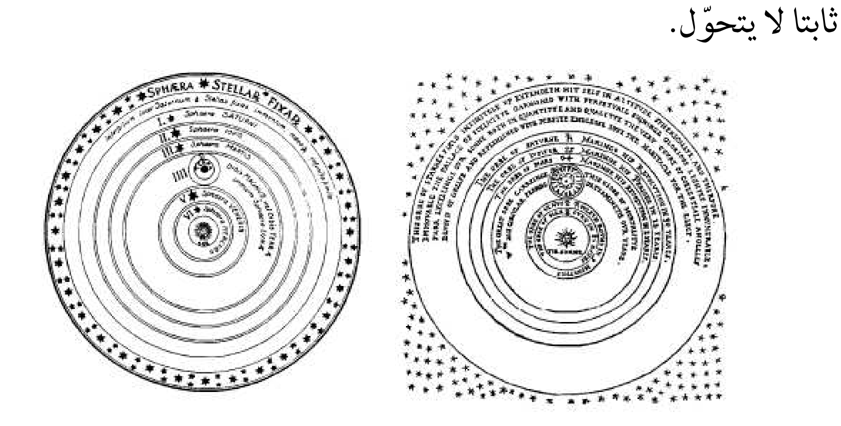
وكان برونو قد قدم حججا جد حديثة ترفض الرأي السائد المتمثل في اعتبار كل النجوم تبعد بنفس المسافة عن الأرض كما لو كانت "مسمّرة ومثبتة على كرة نهائية". وقد أطلق برونو العنان لشاعريته فكتب : "ومن ثمّ فأنا أحرّك جناحي نحو الأجواء، لا أخشى مواجهة أي حاجز، سواء كان من بلّور أو من زجاج، أشق السماوات وانتصب في اللانهاية. وعندما أرتفع فوق هذا العالم متجهًا إلى عوالم أخرى وأنفذ إلى ما وراءها عبر الحقل السماوي فإني أترك ورائي ما يشاهده آخرون عن بعد." [من مقدمة De l'infini, de l'Univers et des mondes (حول اللانهاية والكون والعوالم)].

ومن ثمّ فلا وجود لنهايات أو حدود أو حافات أو أسوار تعرقل وتوقف الزخم اللانهائي للأشياء. ومن ذلك يأتي التكاثر اللانهائي للعوالم. غير أن التفكير في تعداد العوالم يطرح بعض الانشغالات عند الفكر الديني المسيحي : إذا ما وجدت عدة عوالم آهلة بالسكان فكم مرة تم التجسّد؟ مرة واحدة؟ في هذه الحالة ستكون الأرض في موقع استثنائي : إنه امتياز معتبر إذا ما راعينا المظهر الإيجابي لإعادة التجسد الإلهي، أو على العكس من ذلك، سخط رهيب لأن الأرض تكون المكان الوحيد الذي وقعت فيه الخطيئة الأولى. أما إذا تم التجسّد عدة مرات فستكون عملية تافهة بسبب تكرارها، ولن تكون عندئذ معجزة لأن المعجزة تحدث، حسب تعريفها، مرة واحدة.

وهكذا نلاحظ في نهاية المطاف أن الفكرة الكسمولوجية الهدامة لا تكمن في تأكيد مركزية الشمس بل في تأكيد التكاثر غير المنتهي للعوالم. تلك هي الفكرة التي أدت إلى حرق برونو أمام الملإ في ساحة من ساحات روما.

علم الفلك الجديد

والواقع أن نيكولا دي كويس وجوردانو برونو لم يكن لهما، خلال عصرهما، أي صدى علمي رغم قوة اعتقادهما. ذلك أنهما لم يكشفا عن أية مشاهدات تدعم تصوراتهما المناهضة للعقيدة المسيحية. وكان علينا انتظار عام 1572 - حين شوهد النجم (فوق) الجديد "سوبرنوفا" Supernova * من قبل تيخو براها Tycho Brahe (1546-1601) – ليتوفر أول عنصر مشاهدة حيّر العقول، ومهّد سقوط كسمولوجيا أرسطو. والسبب هو أن هذا النجم قد ظهر في كرة النجوم الثابتة، أي في عالم خارج عالم القمر الذي كان لا يزال يعتبر ثابتا لا يتحوّل.



نظامَا العالم. لقد تمّ اكتشاف الطبيعة الفضائية للعالم بصفة تدريجية. ويوضح توالي الشكلين (من اليسار إلى اليمين) التخلي عن "العالم المغلق" المنتهي والمحدود بكرة النجوم الثابتة : تتوزع نجوم الكون الجديد في كامل الفضاء، بمسافات مختلفة، وبدون حدود ظاهرة.

كان الإنكليزي توماس ديجس Thomas Digges قد أبدى عام 1576 رأيا يميل إلى الاعتقاد بأن النجوم الثابتة ليست معلقة في سطح كرة بل إنها منتشرة لانهائيا نحو الأعلى. ولقي كتابه الفلكي صدى أكثر مما لقيت كتابات برونو الفلسفية.

ومع ذلك لم يقترح ديجس تصورا فيزيائيا للانهاية. فهو يعتبر أن السماء والنجوم تمثل دائما موطن الآلهة. ومن هذا المنظور فهي لا تنتمي إلى عالمنا انتماءً كليا. أما جوهانس كبلر (1571-1630) فيعتبر مفهوم عدم انتهاء الكون ماورائيا محضا لأنه لم يستند إلى تجربة، ولذا فهو خال من أي مغزى علمي : " الواقع أن الفكر لا يمكنه إدراك جسم غير منته.

ذلك أن تصورات العقل في موضوع اللانهاية تُحيل إلى معنى كلمة "اللانهاية" أو إلى شيء يتجاوز أي قياس عددي نستطيع إدراكه، مرئيا كان أو قابلا للملامسة؛ بمعنى شيء ليس لانهائيا "فعليا" (أي بمفهوم اللانهاية الفاعل) إذ أنه لا يمكن إدراك قياس غير منته."

لقد وفّر منظار غليليو غليلي (1564-1642) Galileo Galillei في مطلع القرن السابع عشر الحجج الأولى المتصلة بالمشاهدات المباشرة ضد ثبات عالم ما فوق القمر. لكن غليليو تبنى، مثل كبلر، موقف الفيزيائي الحذر : "إنه من غير المؤكد (وأعتقد أن الأمر سيظل هكذا بالنسبة لكل العلم الإنساني) أن العالم منته أو، على عكس ذلك، غير منته."

ومهما يكن من أمر فالطريق انفتح بصفة نهائية أمام علوم جديدة للكون، مبنية على أساس فضاء غير منته. وقد اعتبر روني ديكارت René Descartes (1596-1650) أن وحدة وتنظيم الكون في مضمونه وقوانينه لا

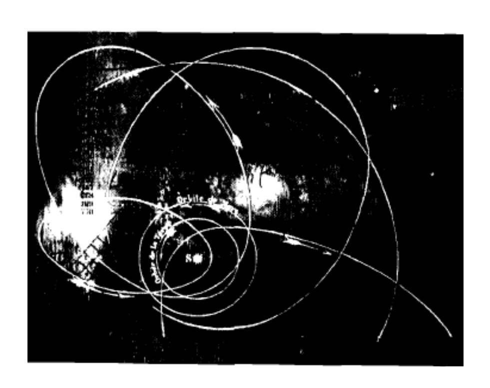
يعتريه أدنى شك. إن إدراك المنتهي يعترف باللانهاية، لكن هذا الأخير مخصص للخالق وحده.

وكما كتب ألكسندر كويري Alexandre Koyré فإن هذا التصور الجديد للكون قد أحدث انقلابا في الفكر الفلسفي والعلمي أبعده كثيرا عن الحماس الذي كان في بداية الأمر لدى كويس وبرونو : "إن تدمير النظام الكوني وفقدان الأرض لمركزيتها في هذا النظام، حتى لو ظلت الأرض وحيدة، جعل الإنسان يضيع، في الأخير، موقعه الوحيد والمتميّز في مسرحية الخلق التي كان يؤدي فيها، حتى ذلك الوقت، دور الممثل المركزي والمشاهد. وفي نهاية هذا التطور نجد العالَم الصامتَ والرهيبَ لـ"لفاجر" الملحد باسكال Pascal (الصمت الأبدي لهذه الفضاءات غير المنتهية يخيفني)، إنه عالَم مجرد من معاني الفلسفة العلمية الحديثة. وفي آخر المطاف نجد العدَمية والخيبة." (عن كتاب Du monde clos à l'univers infini (من العالَم المغلق إلى الكون غير المنتهي) للأكسندر كويري).

إلا أن العالم يتّجه بقوة نحو انتصار اللانهاية : لقد شرح إسحاق نيوتن (1642-1727) الميكانيكا السماوي باستخدام لفظ الجاذبية الكونية*، أي التثاقل*، الذي صار يعتبر مسؤولا عن هيكلة نظام الكون. ولما كانت قوة التثاقل ذات بعد غير منته فقد انغمس علم الكون في إطار فضاء غير منته، ثم إن تأثير الإرث الإغريقي جعله يعتبر الزمن غير منته.

وهكذا بدأ قرن الأنوار تحت شعار اللانهاية. وكان إمانويل كانط Emmanuel Kant معجبا بنيوتن فاهتم باللانهاية. وقد عبّر في مؤلفه "التاريخ الطبيعي والنظرية العامة للسماء" عن قناعته بأن العالم غير منته لأن الله غير منته، ولأن العالم مرتبط بالله. وبعد فترة عالج في كتابه "نقد العقل الطاهر"

مسألة اللانهاية بطريقة جدلية رابطًا إياها بمسألة الكون ومبينًا بأن النقاش حول وجود (أو عدم وجود) اللانهاية نقاش أفكار" تدّعي اكتساب معارف تمتد إلى ما وراء نطاق كافة التجارب الممكنة".



"علم الفلك الجديد" لكبلر. لقد أسس جوهانس كبلر، باكتشاف قوانين الحركة البيضوية للكواكب، "علم الفلك الجديد" في مطلع القرن السابع عشر. وهكذا مهّد الطريق لديكارت ونيوتن ولقوانين الميكانيكا الكلاسيكية. (الصورة مأخوذة من فيلم "لامتناهي الانحناء" من تأليف لور ديلسال Laure Delesalle، ومارك لاشييز-ري Marc Lachièze-Rey وجون- بيير لوميني Jean-Pierre Luminet، إخراج لور ديلسال).

ظلام الليل واللانهاية

كان أحد الأطباء خلال القرن الثامن عشر في مدينة بريم Brême يقضي لياليه أرقًا أمام منظار منتصب فوق سطح داره يرصد السماء. وبتلك الطريقة اكتشف ويلهلم أولبرس Wilhelm Olbers كُوَيْكِب* بالاس Pallas وبعض المذنبات. وقد طرح هذا الفلكي الهاوي ذات يوم سؤالا محرجا : إذا كان الفضاء غير منته ومَلِيئا بالكواكب بشكل منتظم فإن ذلك يؤدي بالضرورة إلى مشاهدة أحد النجوم في أي اتجاه ننظر فيه إلى السماء. وبعبارة أخرى فكبد السماء سيصبح مشكلا من النجوم دون سواها، ومن ثمّ فشدة لمعانه سيعادل لمعان تلك النجوم. ويمكن من خلال عمليات حسابية بسيطة إثبات بأن السماء ستبدو في ذلك الكون مضيئة بدرجة لا تقل عن شدة إضاءة سطح الشمس. وفي هذه الحالة، من أين تأتي ظلمة الليل؟

كان آخرون قبل أولبرس، مثل كبلر وجون فيلب لويز دي شيزو Jean-Philippe Loys de Chéseaux، قد طرحوا سؤالا مماثلا بشكل أكثر احتشاما. وفي القرن التاسع عشر بلغت الأمور درجة من النضج جعلت "محيّرة ظلمة الليل" محلّ شروحات ونماذج جنونية. وفي مطلع القرن العشرين سمح بروز علم الكون الحديث بإدراك أن هذه المحيّرة كانت في واقع الأمر ثرية بالمعاني بخصوص موضوع انتهاء المكان و/أو الزمان للكون.

وتقول أبسط الشروحات إن الكون منته فضائيا. وإذا ما سبقنا الأحداث قليلا فسنجد هذا الشرح مقبولا اليوم دون أية مفارقة في سياق الهندسة الحديثة. والحل يأتي من كون عدد النجوم محدودا في حالة انتهاء الفضاء، ومن ثمّ لا نستطيع التأكيد بأننا سنشاهد نجما في أي اتجاه ننظر من خلاله إلى السماء (يكفي، في الواقع، افتراض انتهاء عدد النجوم دون افتراض انتهاء الفضاء).

و إذا كان هذا الشرح هو الشرح الممكن الوحيد نستطيع اعتبار أن ظلمة الليل تثبت الانتهاء المكاني للكون، أو على الأقل انتهاء عدد النجوم.

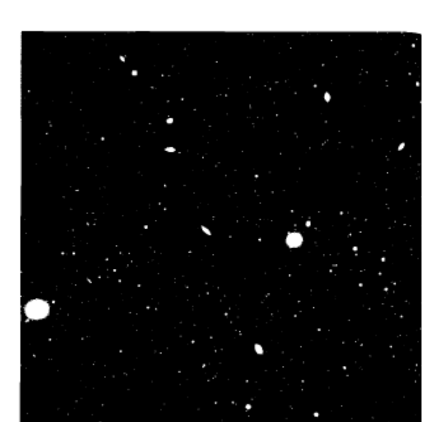
غير أن هناك على الأقل ثلاثة تفسيرات ممكنة أخرى.

تفطن لأول هذه التفسيرات الكاتب إيدغار بو Edgar Poe في نص محذِّر بعنوان Euréka (عرفتها). ويستند التفسير إلى انتهاء الزمن بل الفضاء. فنحن نعلم أن الضوء ينتشر بسرعة منتهية. غير أن النجوم لم تكن دائما موجودة في كون منته زمنيًا : بما أننا لا نستطيع استقبال ضوء تلك النجوم إلا إذا كان لها متسع من الوقت لبلوغنا، أي إذا كانت النجوم الصادرة منها قريبة بكفاية، فإن لمعان السماء لا يكون منظّما. يترتب عن ذلك أن النجوم (وليس الكون) لم تكن موجودة إلا منذ مدة محدودة. ذلك هو بالتحديد ما تنص عليه نماذج الانفجار الأعظم : الكون لم يكن موجودا - على الأقل بصفة تسمح بوجود نجوم – إلا منذ بعض ملايير السنين.

توفر نماذج الانفجار الأعظم جوابا ثانيا محتملا لمحيّرة أولبرس : يمكن اعتبار السماء مضيئا خلال الليل! إنه لا يلمع بضوء عادي، مرئي، لكنه يقع في نطاق إشعاع كهرومغنطيسي آخر، هو الموجات المجهرية. ويوافق هذا اللمعان المنتظم للسماء ما يسمى بـ "عمق كوني شعشع" (تعتبر مشاهدة هذا اللمعان واحدة من أهم الحجج المؤيدة للانفجار الأعظم). ويعتقد الفيزيائيون الفلكيون بأن هذا الإشعاع صدر منذ حوالي 15 مليار سنة، وأنه كان عند صدوره شبيها بإشعاع نجم. ولماذا لم يبق على تلك الحال؟ إن الجواب على هذا السؤال هو الذي يزودنا بالتفسير الثالث الممكن لمحيرة أولبرس : السبب هو توسع الكون، الذي اكتشف في مطلع القرن العشرين. ذلك أن طاقة الإشعاع الكهرومغنطيسي في الكون المتزايد الاتساع، تخفّ تدريجيا (وهذا يؤدي عمليا

إلى "زحزحة نحو الأحمر*") : طاقة الإشعاع (المرتبطة بالتردد) تتضاءل خلال التطور الكوني. هذا هو السبب الذي يجعل إشعاع العمق الكوني لا يظهر اليوم إلا بشكل قليل الطاقة على الرغم من أنه تم بثّه في شكل طاقة – ضوء مرئي وأشعة تحت الحمراء. وذلك أيضا حال ضوء النجوم والمجرات* البعيدة : إشعاعات أبعد المجرات ضعيفة الطاقة إلى حد أصبحنا لا نستطيع مشاهدتها؛ والوضع صار كما لو كانت محدودة العدد.

وهكذا تبيّن لنا ظلمة وبرودة الليل بأن الكون (المتوسّع ... وقد يكون عمره منتهيا) يختلف، في كل الأحوال، عن الوضع الذي كان فيه قبل بعض ملايير السنين. ومن ثمّ ندرك أن الكون يتطور بشكل أو بآخر.



السماء ليلاً. لماذا يسود الظلام في السماء أثناء الليل، ولا يلمع السماء كالشمس؟ السبب هو أن الكون في توسع بدأ منذ زمن محدود. من الجائز أن يدلنا توزيع أبعد المجرات المنتشرة عبر السماء عما إذا كان الفضاء منتهيا أو غير منته.

Ph. © Science Photo Library/
Cosmos.

الزمكان (الزمضاء) الجديد

كانت الثورة التي عرفها علم الكون في مطلع القرن العشرين ثمرة الربط بين التقدم النظري الذي وفرته نظرية النسبية العامة* لألبرت آينشتاين والتقدم المنجز في مجال المشاهدة.

لقد قلبت النسبية العامة حتى مفاهيم الزمن والفضاء. فلم يعد الكون بنية فضاء (أقليدي*) ثابتة تحدث فيها ظواهر تحركها قوى، بل صار زمضاءً "قابلا للتشوّه"، وهو ما يسميه الرياضياتيون "منوّعة" رباعية الأبعاد (3 أبعاد للفضاء وبعد واحد للزمن) يشوّهها وجود المادة. أما التثاقل فيصبح تجليا لانحناء الزمضاء. ومن ثمّ فالتثاقل هو الذي يحدد المسارات الممكنة للجسيمات المادية وللأشعة الضوئية المجبرة على مسايرة انعراجات الهندسة المنحنية.

تصف المعادلات الأساسية للنسبية – وهي معادلات آينشتاين – الطريقة التي يحدد بها المحتوى الماديُ للكون الشكلَ الهندسي للزمضاء. وهكذا فالنظرية تسمح بوصف الكون في مجمله وفق نماذج كونية محتملة. وبطبيعة الحال فمن بين الحلول التي توفّرها النظرية هناك البعض منها (فقط) يصف الكون وصفا سليما دون الوقوع في تناقضات مع المشاهدات الفلكية.

وعلى سبيل المثال، نجد آينشتاين قد أنشأ عام 1917 النموذج الأول للكون المبني على النظرية النسبية، الذي يعتبر أول علم كون نسبي. وأهم عنصر جديد في ذلك هو اقتراح مقاربة جديدة تماما لمسألة الفضاء المنتهي أو غير المنتهي. فالهندسة غير الأقليدية، التي تعتبر أساس النسبية العامة، سمحت بتصوّر فضاء - وتمثيله تمثيلا دقيقا - يكون في آن واحد منتهيا (أي ذا حجم ومحيطات منتهية بوضوح وقابلة للقياس) وبدون حدود. وهكذا سمحت النسبية، لأول مرة في

تاريخ الأفكار، باعتبار كون منته لا يبرز أية مفارقة. ثم كان لا بد من التخلي عن هذا النموذج الدقيق – المسمى نموذج آينشتاين – لأنه يصف كونا ساكنا في حين أن المشاهدات أظهرت بسرعة بأن الكون في حالة توسّع.

ورغم ذلك فالنموذج أتى بجديد : من الممكن أن نتصور فضاء منتهيا وبدون حدود. كما يحتمل اعتبار كون غير منته. وهكذا نلاحظ أن النسبية قد أعادت إلى طاولة النقاش محيّرة المنتهي واللامنتهي موفّرة، في ذات الوقت للباحثين في علم الكون، فضاءات جليّة الانتهاء أو جلية اللانتهاء.

فضاء في توسّع

كانت المستجدات التقنية، سيما تنصيب المنظار الفلكي البالغ قطره 2.50 مترا على جبل ولسن Wilson بالولايات المتحدة، من وراء التقدم الذي حققه مجال الرصد في مطلع القرن العشرين، وهذا إلى جانب منجزات الثورة المفاهيمية المنبثقة عن ظهور نظرية النسبية. وكان الفلكي الأمريكي إدوين هوبل Edwin Hubble محظوظا عندما استخدم لأول مرة هذا المسبار الكوني* لاستكشاف الكون. وأثبت هوبل عام 1924 أن سديم "المرأة المسلسلة" (أندروميدا) Andromeda يقع بعيدا عن مجرّتنا. وسرعان ما بيّن، هو ومعاونوه، بأن الحال ذاته نصادفه في كل سديم حلزوني* : إنها مجرات كثيرة تشبه مجرتنا، والعالم مكوَّن من كل هذه المجرات. وكأنها "الجزر الكونية" التي تصوَّر وجودها كانط ! وهكذا يبدو الكون المادي، أي العالم الفيزيائي، متسعا جدا متجاوزا كثيرا حدود مجرّتنا : هناك مسافات بملايين – ولم نعد نقول آلاف - السنوات الضوئية.

وإلى جانب هذا المظهر الفضائي نجد اكتشافا رصديا متعلقا بالتطور الزمني للكون. فقد أعلن هوبل عام 1929 بأن المجرات الأخرى تبتعد باستمرار عن مجرّتنا بسُرَع متناسبة مع المسافات التي تفصلنا عنها. وظلت هذه النتيجة الرصدية غير مفهومة حتى سلّمت الأسرة العلمية - خلال الثلاثينيات من القرن العشرين - بفكرة اقترحها الفيزيائي البلجيكي جورج لوماتر Georges Lemaître عام 1927 (وعبّر عنها بشكل مستقل الرياضياتي الروسي ألكسندر فريدمن Alexandre Friedmann) مفادها أن : الفضاء برمّته يتمدّد بمرّ الزمن؛ فهو في توسّع، وهذا التوسّع يجرّ معه مجموعة المجرات. ويتعلق الأمر هنا بخطوة جبارة في موضوع تصوّر الكون. ذلك أن السماء كانت تعتبر منذ العهود الغابرة غير خاضعة لأي تحرك أو تطوّر. والحقيقية أننا سلّمنا منذ عصر النهضة بحدوث ظواهر جديدة في السماء غير أنه لم يخطر ببالنا أن الكون برمته يمكن أن يتطور. وكان آينشتاين نفسه قد وقع في قبضة هذا التسليم عند إنشاء نموذجه الساكن.

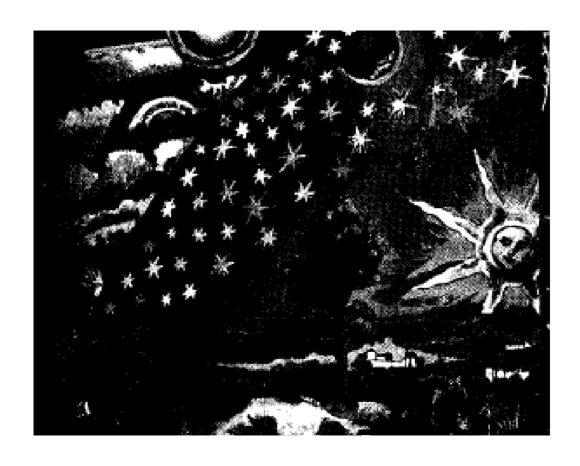
وقد ظلت أسطورة الكون الساكن، أو المستقر، جاثمة إلى اليوم في بعض العقول التي لم تستطع التخلص من هذا التأثير الفكري. ولعل ذلك هو سبب رفضها لنماذج الانفجار الأعظم.

وعلى كل حال فالكون لم يعد، ولن يكون، في ضمير الإنسان، إطارا ثابتا وخالدا تَسَجَّل فيه الأحداث الكونية. ومن الآن فصاعدا صار من الجائز الاعتقاد بأن الكون يتحوَّل ويتطوَّر (بل يزداد الأمر صعوبة في عدم تقبّل ذلك). وقد أدرك الفيزيائيون، بعد جورج لوماتر، مدى انعكاس ذلك على عمق تغيّر النظرة لخصوصيات الفضاء والزمن.

فهل هو منته أو غير منته؟

إن مسألة انتهاء وعدم انتهاء الفضاء – وربما الزمن أيضا، إلى درجة معينة - مطروحة طرحا جيدا في سياق نماذج فريدمن-لوماتر (المشار إليها بنماذج FL "ف.ل."). تفترض هذه النماذج أن عدم انتظام توزيع المادة أمر مهمل وهو ما يجعل الكون يتمتع بنفس الخواص في كل مكان. نقول في هذه الحالة إن الكون "متجانس ومتساوي الخواص". وتتميز هذه الخواص بأمرين لا ثالث لهما : انحناء الكون (وهو ثابت في الفضاء غير أنه ينبغي تحديد إشارته) وطبولوجيته. ويهتم الفيزيائيون الفلكيون وعلماء الفلك في غالب الأحيان بصيغ مختصرة لهذه النماذج : هم يهملون الجانب "الطبولوجي" (يفترضون هذه الطبولوجيا أبسط ما يمكن) ويركزون اهتمامهم على الانحناء وحده. سنرى لاحقا أن هذا الاختصار جوهري عندما يتعلق الأمر بمسألة اللانهاية الفضائي.

وفي ما يتعلق بالانحناء ليس هناك سوى ثلاث مجموعات من الفضاءات تعتبر مقبولة في نماذج ف.ل. هي : 1) الفضاء الأقليدي* (أي الفضاء المعدوم الانحناء، وهو الذي نلمّ جيدا بخواصه)، 2) الفضاء الكروي* (الموجب الانحناء)، 3) فضاء لوبتشفسكي Lobatchevski* (المسمى أيضا الفضاء الزائدي، السلبي الانحناء). والملاحظ أن الفضاء الكروي منته في جميع الأحوال، وذلك هو أحد الأسباب التي جعلت آينشتاين يختاره. أما فضاءات المجموعتين الأخريين فإن طابع الانتهاء أو عدمه يتعلق بالطبولوجيا، مع العلم أن تلك الفضاءات غير منتهية حتى في أبسط الحالات. ومن ثمّ فإن إهمال التعقيدات الطبولوجية يجعل معضلة الانتهاء/اللاانتهاء تنحصر في معرفة انحناء الفضاء.



سماوات لها نفس المركز، رسم من القرون الوسطى. كان الاعتقاد، حتى مطلع القرن العشرين، أن لكل عالَم منته حافة. وفي هذه الحالة، ماذا سيكون وراء تلك الحافة؟ لقد أزالت رياضيات وفيزياء اليوم هذه المحيّرة : يمكن أن نتصوّر فضاء منتهيا بدون حافة، كما نستطيع تصوّر فضاء غير منته. رسم لوّنه بلاندين لوموانBlandine Lemoine ، 1993، الأصل موجود في .
Deutsches Museum, Munich,
coll. Carmen © Explorer.

غير أن النسبية العامة تشير إلى الطريقة التي يتم بها حساب هذا الانحناء. وتتعلق قيمته بالمحتوى المادي للكون، سيما بالكثافة المتوسطة للمادة التي يحتويها، وكذا بثابت جَمْعِيٍّ Λ يدعى الثابت الكوني. وفي أغلب الأحيان نلجأ إلى اختصار ثان يتمثل في افتراض انعدام هذا الثابت. وفي هذه الحالة نجد أن طابع الانتهاء/اللانتهاء لا يتعلق إلا بالكثافة المتوسطة للمادة : يتبيّن أن انحناء الفضاء موجب إن كانت تلك الكثافة أكبر من قيمة معينة، "قيمة حرجة"، تساوي $10^{-29} g/cm^3$، والانحناء سالب إن كانت الكثافة أصغر من تلك

القيمة. وبالتالي فالفضاء سيكون منتهيا - منطويا، بمفهوم معين، على ذاته نتيجة تأثير تثاقله - أو غير منته.

تشير مختلف المشاهدات الفلكية إلى كثافة متوسطة تقل بعشر مرات عن القيمة الحرجة. ومن ثم فالظاهر أن الكون غير منته. والجدير بالذكر أن القيمة المرصودة ليست سوى نهاية دنيا [بلغة الرياضيات]. ومن العبث أن نعتقد بأننا نشاهد كل كمية المادة المتواجدة في الكون؛ بل قد يكون من الأرجح - وهناك عدة أسباب تدعونا إلى هذا الترجيح (دون وجود سبب قاطع) - تواجد كميات كبيرة من المادة المختفية من شأنها أن تجعل الكثافة الحقيقية تبلغ القيمة الحرجة. وفي هذه الحالة سيكون الكون مغلقا ومنتهيا.

وهكذا فمسألة اللانهاية الفضائي ما فتئت تنير تاريخ علم الكون، بشكل متميّز، منذ أزيد من ألفي سنة. وكان الفلاسفة الإغريق قد قطعوا شوطا حاسما في نمْذَجة الكون عندما انتقلوا من "لانهاية" ما قبل سقراط إلى "المنتهي"، وعندما تطابق لديهم العالَم الفيزيائي بالفضاء الهندسي. وجرت الأمور خلال القرن السابع عشر في الاتجاه المعاكس : لقد رسّخ نيوتن فكرة الانتقال من العالم المغلق إلى الكون اللامنتهي الذي طابق الكون بالفضاء الأقليدي اللامنتهي. أما المرحلة الأساسية الثالثة فبدأت عندما وفّرت نظرية النسبية العامة سياقا جديدا لإدراك الكون باعتبار زمكان تحدب وانحنى بفعل المادة. وقد لجأت هذه النظرية إلى الهندسات غير الإقليدية، وهو ما جعل الاحتمالين (الفضاء المنتهي أو غير المنتهي) حاضرين منذ ذلك الحين ضمن نفس النمْذَجة. سنرى في القسم الثاني كيف سمحت تطورات نظرية النسبية بتناول مسألة الحدود الفضائية والزمنية للكون من خلال زوايا جديدة تماما، وكيف أعادت تلك التطورات النقاشات حول اللانهاية إلى السطح.

لانهاية المادة

"كل الأشياء كانت مجتمعة، لانهائية في تعدادها كما في صغرها؛ ذلك أن الصغر كان أيضا غير منته."

أنكسغور Anaxagore

المتصل والمتوسِّع واللانهاية

تكتب الفيزياء ، كما قال غاليليو، بلغة الرياضيات. ومن ثمّ فاللانهاية الذي نتحدث عنه في الرياضيات لا بد أن يتدخل في الفيزياء. والملاحظ أن مسألة اللانهاية مرتبطة بكل مقدار توسّعي : الفضاء والزمن، كما أسلفنا، ومجموعات الأعداد، والمادة.

باستخدام عملية القلب يتم في الرياضيات الوصل بين الأعداد الصغيرة والأعداد الكبيرة. فإذا صار A كبيرا جدا، محاذيا للانهاية، صار $\frac{1}{A}$ صغيرا جدا، محاذيا للصفر. وبذلك نربط اللانهاية بالصفر. وهكذا نرى، حسب كتاب "الفيزياء" لأرسطو، أن اللامتناهي الصغر هو نظير اللامتناهي الكبر : يتعلق الأمر بلانهاية نحصل عليه بالقسمة، أي بشيء لا ينضب يتجلى عندما نقسم المقادير لانهائيا.

لقد أدى تطور الرياضيات في مطلع القرن العشرين إلى التحكم في مفهوم اللانهاية. وكان ذلك بفضل ترسانة من المفاهيم المعقدة نسبيا، تبيّن من خلالها أن مفهوم اللانهاية المترتب عنها لا يقلب بسهولة كما لو كنا نقلب عددا من

الأعداد. وبذلك يتضح أن مسألة اللامتناهيات الصغر ذات طبيعة (وتاريخ) تختلف جذريا عن اللامتناهيات الكبر. هذا هو الوضع في الرياضيات، وهو أكثر حدة في الفيزياء لأن اللامتناهي الكبر واللامتناهي الصغر يتعلقان مبدئيا بفرعين مختلفين كليا : فرع الفيزياء الفلكية وعلم الكون، وفرع وفيزياء الجزيئات.

تتمخض مسألة اللامتناهي الصغر من كون كل مقدار منته – طول قطعة مستقيمة، مدة (زمنية)، كمية مادة – يمكن أن يقسم – في الخيال على الأقل - إلى عدد غير منته من العناصر الجزئية. وإذا أردنا التعرّف على التحولات أو الحركات التي تطرأ على نظام ينبغي إجراء أدق التحاليل ضمن أصغر المقاطع الفضائية أو الزمنية الأقرب إلى اللامتناهيات الصغر. وبالتالي يؤدي علم الحركة* والديناميكا* إلى تناول كميات زمنية أو فضائية لامتناهية الصغر. كما هو الشأن أيضا بالنسبة للمادة والمقادير التي تقيس التوسع، مثل الكتلة والحجم، الخ، حيث يتبيّن أنه لا مناص من اللجوء إلى اللامتناهيات الصغر.

والملاحظ في جميع هذه الأحوال – الفضاء، الحجم، الزمن، الكتلة - أن القسمة عند اللانهاية ترتبط بطابع "الاتصال" (سنرى في القسم الثاني كيف أن مقاربات جديدة تنتقد هذه النقطة). إن تجربة "المتصل" متجذّرة في أعماق منهجنا عندما يتعلق الأمر بإدراك العالم : يمثّل "المتصل" الدليل الحدسي على صلابة الأشياء، أي على المتانة وديمومة العالم الذي يحيط بنا. فكتلة من الحجارة تظل كما هي، قائمة ومتماسكة ومتينة لا تتحوّل. كما أن السطح الثابت للبحر الهادئ يوفّر منظر اتصال واستمرار. وكل ذلك يظل مقاوما لأي انكسار.

الحساب اللانهائي

لقد كانت مسألة اللانهاية قوية الحضور في تاريخ علم الحركة والديناميكا، وبتحصيل الحاصل، الفيزياء. فمنذ أرخميدس حتى غاليليو – حيث بلغ الأمر ذروته – كانت العديد من مراحل دراسة الطبيعة تتميز بمحاولة وصف العالم باستخدام الرياضيات. غير أن هذه المحاولة واجهت قضية اللامتناهيات : فسواء ركّزنا اهتمامنا على الفضاء أو الزمن أو على أي مقدار آخر فإننا سرعان ما نجد أنفسنا أمام محيّرات حول الكميات غير القابلة للقسمة : "كيف نفسر المجاميع غير المنتهية لأجزاء لامتناهية الصغر بالاستناد على أساس مفاهيمي رياضياتي متين؟" تلك هي، بالتحديد، المسألة التي عبّر عنها زنون Zenon عبر سهمه الذي عليه، قبل بلوغ هدفه، قطع نصف المسافة المتبقية، ثم نصف هذه الأخيرة، وهكذا دواليك لانهائيا.

كانت هذه المحيّرة التي تموقعت بين الرياضيات والفيزياء قد عطلت تقدم الميكانيكا*، بل الفيزياء بأكملها. والملاحظ أن حلها خلال القرنين السابع عشر والثامن عشر قد وضع حدا للفكرة القائلة بأن الرياضيات، وبوجه خاص الهندسة الأقليدية، تعتبر المسلك الوحيد المؤدي إلى إدراك طبيعة الأشياء إدراكا جيدا. ومقابل ذلك أدى هذا الحل إلى تأسيس الفيزياء الرياضياتية على قواعد جديدة.

تظهر الصعوبات المرتبطة بالكميات غير القابلة للقسمة مثلا في مسائل السكون والحركة المطروحة من قبل غاليليو وديكارت. وكان نيوتن وكريستيان هيوغنس Christian Huygens أول من كانوا وراء قفزة انتقالية أنجزها كاملةً ويلهلم غوتفريد ليبنيتز Wilhelm Gottfried Leibniz حين تناول بدون أية عقبة ولا محيّرة "حركة قابلة للقسمة عند اللانهاية" مبتكرا حسابا يسمح

بالتعامل مع لامتناهيات الصغر تعاملا منسجما. إلا أن ليبنيتز قدم الكميات اللامتناهية كـ "صور تخيّلية دون واقع أنطولوجي"، وكـ "مفاهيم مثالية"، ومع ذلك كانت متانة تأسيسها كافية لتبرير الحساب اللامتناهي.

وقد عمم بيير فارينيون Pierre Varignon وفوتنيل Fontenelle استخدام هذا الحساب الجديد فانجر عن ذلك حوالي عام 1700 تحول في علم الحركة وارتباطها بمسألة اللانهاية. وطرح فوتنيل بوضوح قضية التمييز، الذي لا مناص منه، بين اللانهاية الهندسي واللانهاية الماورائي المستقلين أنطولوجيًا. وهذا ما يمكّنه من الحديث عن "العدد غير المنتهي الموجود فعلا كما هو حال العدد المنتهي". وبما أننا أصبحنا نتحكم رياضياتيا في فكرة اللامتناهي الصغر نستطيع تأسيس الفيزياء الرياضياتية، أي فيزياء مبنية على نظام منسجم من المسلمات* والمبادئ والمفاهيم بوسعنا مقارنة نتائجها مع التجربة. كان هذا البرنامج - الذي صار ممكن الإنجاز بفضل أعمال كبلر وغاليليو - قد طُبّق كليا من قبل لويس دي لاغرانج Louis de Lagrange (1736-1813).

وإذا كان التبني التدريجي للامتناهي الصغر في الرياضيات قد أسس الحساب اللامتناهي وسمح بميلاد الفيزياء الرياضياتية فإننا ما زلنا، في واقع الأمر، بعيدين عن نظرية حقيقية للانهاية. وقد تطورت هذه النظرية لاحقا نتيجة الأعمال الرياضياتية لبرنارد بولزانو Bernard Bolzano (1781-1848)، الذي كان رائدا في طرح فكرة جديدة حقًا حول مفهوم اللانهاية. وكان بولزانو تلميذا لليبنيتز وخصما لكانط، وهو مؤلف كتاب لم يطلع عليه الكثيرون مزج فيه الفلسفة وعلم الدين والرياضيات والفيزياء. وكان أول من دافع بقوة عن فكرة وضع اللانهاية الفاعل - وليس فقط اللانهاية الكامن - في مكانة تعادل مكانة الأعداد المنتهية نتعامل معه، بكل شرعية، كتعاملنا مع أي كائن

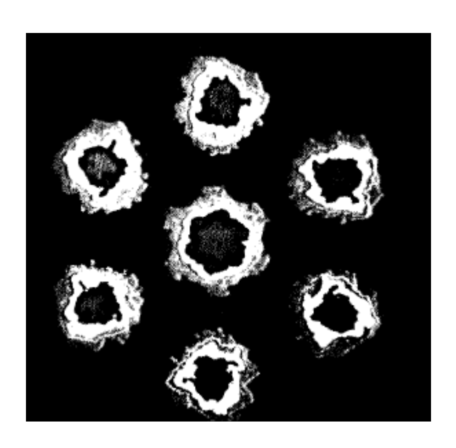
رياضياتي آخر. وظلت هذه المفاهيم قيد الدراسة والتدقيق حتى القرن العشرين إلى أن اتضح معناها في سياق نظرية المجموعات*. غير أن هذه الأعمال كانت بعيدة عن الفيزياء ولم تقترح حلولا لموضوع المادة.

قابلية المادة للقسمة

هل يمكن تقسيم المادة لانهائيا؟ هل هي متصلة أم "متقطعة"؟ هل بمقدورنا أن نقطّع جزءا من المادة بدون توقف إلى كسور تتصاغر تدريجيا؟ أو أننا سنواجه كيانات لا تقبل التقسيم؟ نذكّر أننا رأينا بأن فكرة مادة مركبة من أجزاء لا تقبل التقطيع ("الذرات") يرجع تاريخها إلى ديموقريط. وإذا استثنينا بعض الإشارات في كتابات القرون الوسطى والقرن السابع عشر فإنها لم تثر من جديد بصفة جادة إلا في القرن السابع عشر. وشيئا فشيئا تأسس مفهوم الذرة كمركب رئيسي للمادة.

لكنه سرعان ما صار من البديهي أن الذرة ذاتها تتمتع ببنية داخلية. وقد برز مفهوم الإلكترون* كمركب سالب الشحنة في الذرة من خلال أعمال جون بِران Jean Perrin وجوزف جون تومسن Joseph John Thomson وروبرت ميلّيكان Robert Millikan . ونتج عن ذلك وجود شحنة سالبة. وقد اقترح تومسن عام 1904 فكرة تقول إن الذرة تتشكل من نواة موجبة محاطة بإلكترونات خارج النواة. وفي 1911 اعتمد أرنست روذرفورد Ernest Rutherford على تجارب جيجر Geiger ومارسدن Marsden للتأكيد بأن الذرة تتشكل من نواة مركزية موجبة الشحنة، صغيرة الحجم لكنها كثيفة الكتلة، محاطة بموكب من الإلكترونات. وأجرى بخصوص النواة حسابات لتقدير

أبعادها فوجدها تعادل 10^{-13} سم، في حين قدّر أبعاد النواة الإجمالية بـ 10^{-8} سم. وبناء على هذا التقدير فإن النواة تكاد تكون فارغة.



الذرة. تعترف الفيزياء اليوم - بعد قرون من النقاشات حول قابلية المادة للقسمة لانهائيا- بالطابع المتقطع للمادة. وإذا كانت التقنيات تسمح بـ"رؤية" الذرات فإن لِبناتها الأولية ينبغي البحث عنها في مستوى أعمق من ذلك، وهو مستوى الجسيمات الأولية. Ph. © Science Photo Library/ Cosmos.

والجدير بالملاحظة أن نموذج روذرفورد تواجهه عقبة كبيرة مرتبطة بظهور مباغت للانهاية. ذلك أن تأثير الحقل الجاذب للنواة يؤدي بالإلكترونات إلى زيادة سرعتها. ومن ثمّ فهي تحرر طاقة حسب قوانين النظرية الكلاسيكية. وفي الأخير ينبغي عليها تخفيف السرعة والانهيار حلزونيا بجوار مركز النواة وذلك في مدة جزء من مليار الثانية. وبالتالي فلا شك، حسب روذرفورد، بأن الذرة غير مستقرة على الرغم من وجود مثبِّتٍ لذرات مستقرة.

ولتجنب هذه الكارثة نشر الدنماركي نيلز بوهر Niels Bohr عام 1913 مقالا بعنوان " حول تركيب الذرات والجزيئات." وحسب هذه النظرية الذرية فإن الإلكترونات لا يمكنها أن تتموقع حيثما شاءت حول النواة : هناك مدارات معينة مقبولة. وبالتالي فليس هناك تحرير للطاقة بشكل مستمر (الذي تنبأت بها النظرية الكلاسيكية) ولا احتمال وقوع كارثة. ومن ثم نستطيع فهم استقرار الذرة. ومن جهة أخرى يفسر هذا الاقتراح خواص أخرى للذرة لم تكن مفهومة (يتعلق الأمر بطيفها*، أي بالتوزيع الترددي للاشعاعات التي قد تصدرها أو تستقبلها). وهكذا دمج بوهر مقترحات ماكس بلانك Max Planck (1900) وآينشتاين (1905) القائلة بأن الطاقة مكمَّمة. وعلى الرغم من أن هذه الأعمال لم تكن مكتملة فإنها مهدت طريق الانتقال نحو النظرية الكمومية.

الجسم الأسود واللانهاية

هناك محفز ثان آخر يدعم الرؤية الجديدة للمادة، وهو ناتج من ظهور لانهاية في الحسابات المتعلقة بالجسم الأسود*. إن الجسم الأسود هو النموذج المثالي لكل كائن يُصدِر ويستقبل إشعاعا كهرومغنطيسيا، مثل المعدن الذي وصل درجة الاحمرار نتيجة التسخين وصار يصدر ضوءًا. ذلك أن تبادلات الإشعاع تحدث في مستوى الذرات والإلكترونات الدائمة التهيّج. والسؤال المطروح يتعلق باستنتاج طيف الإشعاع، أي إعادة توزيعه ترددیا انطلاقا من خواص المادة التي يتفاعل معها. إلا أن الحساب المنجز - حسب قواعد الديناميكا الحرارية الساكنة - يؤدي إلى ظهور لانهاية غير مرغوب فيه : ينبغي على كمية الطاقة الصادرة في شكل إشعاع أن تتزايد لانهائيا وفق ترددها. ولذا يجب أن تكون لانهائية، وهذا وضع غير مقبول، ولا يتماشى مع التجربة. تُعرَف هذه المسألة باسم "الكارثة فوق البنفسجية".

وحتى نتخلص من هذه الكارثة ونزيل التناقض خطرت ببال بلانك فكرة "يائسة"، كانت اعتباطية في بداية الأمر : نفترض أن الطاقة لا يمكنها أن تتبادل بين الإشعاع والمادة إلا عبر حزمٍ متقطعة، سميّت الكموم quantum*. نلاحظ لدى مراعاة هذه الفرضية أن الحِساب الجديد يتجنّب المشكلة ويتماشى مع التجربة؛ وحصيلة هذا المسعى تبدو جدّ إيجابية : وهي الإزالة التامة للانهاية. إلا أن بلانك لم يتمكّن من التوصل إلى تفسير لفرضيته، ولم يتبنها إلا بعد يأسه من الحلول الأخرى. والجدير بالذكر أن ذلك لم يمنع هذه الفكرة من أن تكون وراء تأسيس النظرية الكمومية. وقد حلت هذه النظرية مسألة اللانهاية المرتبط بالجسم الأسود. لكن هذه الثورة العلمية الثانية للقرن العشرين وَلَّدَت بدورها لانهايات جديدة، شأنها في ذلك شأن النظرية النسبية العامة.

لانهاية الثقب

صفيحة البؤرة السوداء، إنها شموس حقيقية من شواطئ رملية : آه ! إنها بئر الأسحار.

عن Illuminations (استضاءات)، لأرثر ريمبو Arthur Rimbaud

احتباس الضوء

تعتبر الثقوب السوداء كائنات هجينة تولَّدت عن النظرية النسبية والميكانيكا الكمومي، وهي تسمح لنا بالتأمل في بعض المسائل النموذجية للانهاية.

يعود إدخال هذا المفهوم إلى الفلكِيَّيْن جون متشل John Michell وبيير سيمون دي لابلاس Pierre Simon de Laplace في نهاية القرن الثامن عشر : الثقب الأسود جسم كثيف جدا، وله حقل تثاقلي شديد حتى أنه يمنع أية مادة أو إشعاع من الخروج. ولما كان هذا النجم لا ينفذ منه أي شعاع ضوئي فمن المفترض أن يكون غير مرئي ! يتطلب هذا الاستنتاج شعاعا أقل من قيمة حرجة معينة، تسمى اليوم شعاع شوارزشيلد Schwarzschild : 3 كلم بالنسبة لجسم بكتلة الشمس، و 1 سم فقط بالنسبة لجسم كتلته ككتلة الأرض، وهو ما يعطي فكرة عن مدى التركيز المطلوب للمادة لكي يصبح جسم ثقبا أسودَ.

توفّر نظرية النسبية العامة أساسا نظريا لمفهوم الثقب الأسود. ففي عام 1915، وبعد مضي شهر فقط على ظهور البحوث التأسيسية لآينشتاين، اكتشف كارل شوارزشيلد في سياق هذه النظرية حلا يصف حقل الجاذبية لكتلة كروية محاطة بالفراغ. والملاحظ أن هندسة الزمضاء الموافقة لهذه الحالة

تنطبق بصفة جيدة، مثلا، على الحقل التثاقلي الكائن في النظام الشمسي (فالشمس كروية الشكل تقريبا وباقي المادة الموجودة في النظام الشمسي لها كتلة ضعيفة جدا بحيث نستطيع إهمالها واعتبار ما خارج الشمس خلاءً). والواقع أن الفائدة من حل شوارزشيلد تتجاوز هذا الوضع لأنه حل لا يتعلق بطبيعة الكوكب الذي يولّده بل يرتبط فقط بالكتلة. وهكذا نستطيع تطبيقه على حالة كتلة (مصدر التثاقل) شديدة الكثافة، يجوز اعتبارها في آخر المطاف نقطة. تلك هي الصيغة "النسبية" للثقب الأسود.

وترتبط الخواص المميّزة للثقوب السوداء "النسبية" (أي حسب النظرية النسبية) بخواص غريبة يتمتع بها سطح شوارزشيلد. يبدو هذا السطح كحافة حقيقية للثقب الأسود يجعل منه نظاما مغلقا، أشبه بعالم منعزل، منفصل عن عالمنا. ذلك أن ما يصدر عبر سطح شوارزشيلد (أو من داخله)، وبوجه خاص الضوء، لا يمكن أبدا أن "يخرج" : كل اتجاهات الانتشار المسموح بها تتجه نحو مركز الحقل التثاقلي. يدْعَى هذا السطح المفخخ، الذي يشير إلى الاحتباس النهائي للضوء، "أفق الأحداث" : لا يمكن مشاهدة أي حدث داخل هذه الحدود للزمضاء.

يشبه "أفق الأحداث" الأفق الأرضي الذي يتسبب فيه انحناء كوكبنا. ويمثل الأفق الأرضي حافة فضاء لا يَرى من ورائها الملاّح شيئا. أما أفق الثقب الأسود فهو حافة زمضاء. والجدير بالملاحظة أن الأفق الأرضي نسبي : الدائرة المتمركزة في موقع الملاح تتحرك معه (لنتذكر أن جوردانو برونو أثبت لانهاية العالم بناء على حجج تعتمد على نسبية الأفق). وخلافا لذلك نجد أفق الثقب الأسود أفقًا مطلقًا. فهو يقسم الأحداث إلى فئتين بغض النظر عن المشاهد : المجال الخارجي الذي نستطيع فيه التواصل بشكل "عادي" عبر إشارات ضوئية،

ذلك هو العالم العادي. أما المجال الداخلي فكل أشعته الضوئية متجهة نحو المركز؛ وبهذا الخصوص تشير نظرية النسبية العامة إلى أن التواصل بين الأحداث يصبح خاضعا لقيود حادة.

يؤدي أفق الأحداث دور غشاء وحيد الاتجاه يسمح للمادة والضوء بالدخول، ولا يتيح لهما الخروج. ورغم ذلك فهذا الغشاء ليس سوى سطح هندسي دون تجسيد مادي. وقد يكون من الممكن أن يخترق رجل فضاء هذا السطح لاستكشاف باطن ثقب أسود دون التمكن من العودة إلى الخارج لتقديم اكتشافاته.

اللانهايات المزيفة للثقب الأسود

تبرز معالجة الثقب الأسود باستخدام النظرية النسبية صعوبات تبدو في شكل قيم لانهائية لبعض المقادير الفيزيائية والهندسية.

وتظهر أولى تلك القيم عند الاهتمام بهندسة الزمضاء في بيئة أفق الثقب الأسود (المتمثل في سطح كروي، أو مفلطح قليلا على مستوى القطبين إن كان الثقب الأسود في حالة دوران). نلاحظ أن حل شوارزشيلد يشير في الظاهر إلى أن خواص الفضاء والزمن تصبح "مرَضِية" على هذا السطح. فطول المساطر وظاهر الساعات التي من شأنها قياس المسافات والأزمنة تصبح مضلِّلة عند الاقتراب من هذا السطح : طول المسطرة يصبح قصيرا لانهائيا كما تتباطأ الساعة لانهائيا. وقد لخصها أرثر إدنغتون Arthur Eddington في العبارة التالية : "هناك دائرة سحرية لا يؤدي أيّ قياس بداخلها إلى نتيجة."

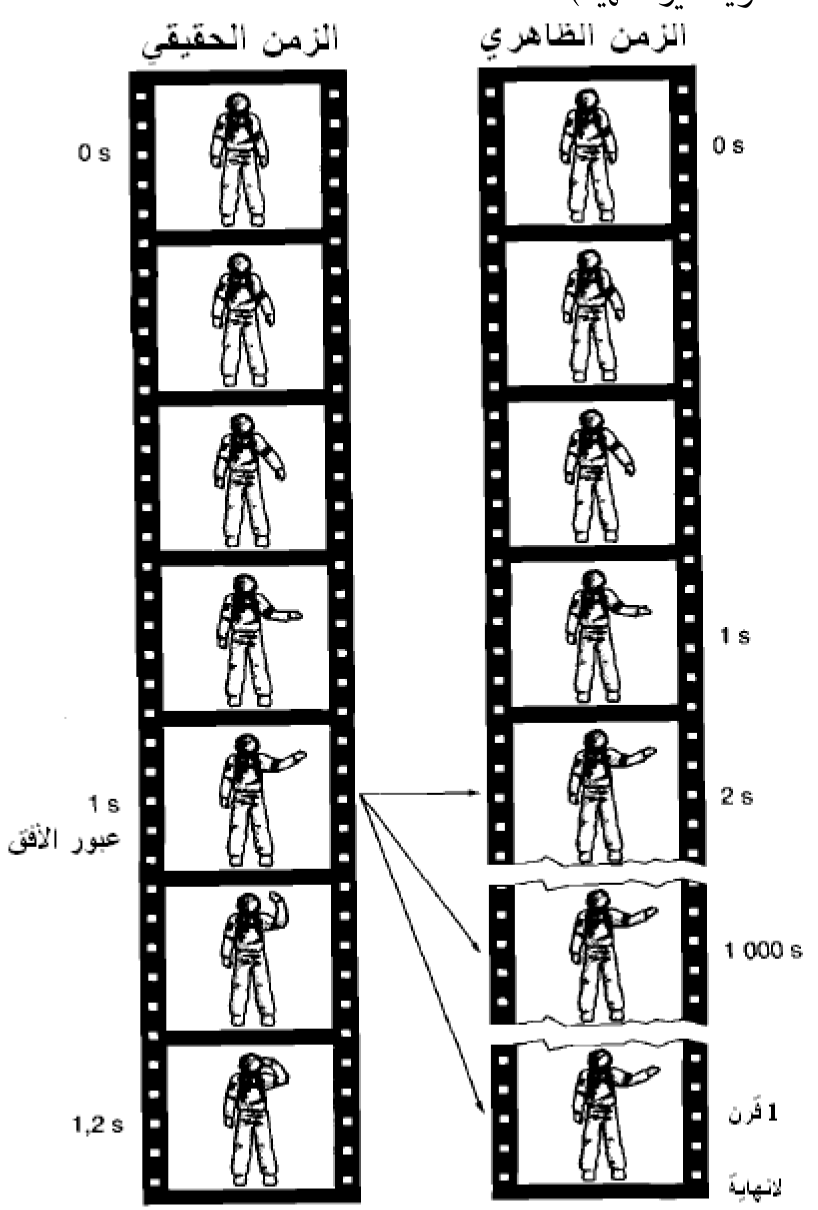
وقد ظلت المسألة المطروحة بهذا الشكل محلّ نقاشات حادة واعتبرت اختراقا لنظرية النسبية العامة. ولم يتم حلها إلا خلال الخمسينيات من القرن

العشرين حينما تبيّن بأن ذلك السلوك المَرَضي لم يكن في الواقع سوى اصطناع رياضياتي ناجم من سوء اختيار إحداثيات المعْلم. وحسب تمثيلات أخرى، التي تتماشى أكثر مع الوضع، فإن التأثيرات السحرية للشعاع الحرج تزول : ذلك لأن اللانهايات كانت لانهايات مزيّفة، والظاهر أنها لا تتماشى مع أي وضعية فيزيائية خاصة نظرا لزيفها.

ورغم ذلك فقد ظهرت خصوصيات للشعاع الحرج. وإذا كنا لا نستطيع عمليا مشاهدة ثقب أسود فإن انحناء الزمضاء بجوار هذا الثقب واقع حقيقي. ولعل أقرب تشبيه لهذا الوضع هو الضوء الصادر بالجوار الخارجي للأفق. وبسبب التشوهات الزمنية التي يحدثها التثاقل فبقدر ما يقترب مصدر الضوء من الأفق بقدر ما تزيد مدة وصول هذا الضوء إلينا. وفي آخر المطاف تكون هذه المدة لانهائية بالنسبة للأشعة الصادرة من الأفق (القول إن المدة لانهائية يعني أن الشعاع لن يصلنا أبدا).

وهكذا فالمشاهد البعيد سيبدو له النجم - عندما يكون في حالة انهيار- أنه خفّف سرعة تقلصه بصفة لانهائية. كما تبدو ظواهر تجري بسرعة عادية بطيئة الحركة وكأنها "مجمّدة". يوضح هذا التجميد الزمني بجلاء تمدّد الزمن الذي تنبأت به نظرية النسبية العامة : يمكن للزمن أن يجري بسرعتين بالنسبة لمشاهدين مختلفين. إن المدة التي يقيسها مشاهد بعيد ومستقل مزود بساعة توافق ما يسمى بالزمن الظاهري. ولفظ "الظاهري" لا يدل على أن الزمن لم يكن حقيقيا، وإنما يشير إلى أن قياسه تمّ من قبل مشاهد لا دور له في مجريات الظاهرة - الظاهرة هنا هي انهيار النجم وتشكل الثقب الأسود. أما الزمن الحقيقي، وهو الزمن الذي تقيسه ساعة مرتبطة بالنجم المتقلص، فهو يختلف عن

الزمن الظاهري. إنه يوافق المدة الحقيقية المنتهية انتهاء واضحا (في حين تكون المدة الظاهرية غير منتهية).



الفيزياء واللانهاية

الزمن المجمد للثقب الأسود. هب أن رجل فضاء قرر استكشاف باطن ثقب أسود.

- يحيّي الإنسانية تحية الوداع قبل أن يختفي.

هناك آلة تصوير تلفزيونية مثبتة على مركبته الفضائية تقوم بالتقاط صوره وترسل إشارتها إلى محطة فضائية مدارية.

يبيّن الفيلم على يسار الشكل (الزمن الحقيقي) الوضع كما يعيشه فعلا المستكشف.

- في لحظة أداء التحية يخترق الرجل حدود الثقب الأسود (الأفق) بدون أن يتفطن لذلك؛ ومدة أداء التحية كانت 1.2 ثانية (الحرف s في الشكل يشير إلى وحدة "الثانية") وتنتهي التحية في قاع الثقب الأسود (نقطة متفردة).

كانت مدة التحية منتهية.

- أما الفيلم المبيّن على يمين الشكل (الزمن الظاهري) فيظهر الوضع كما تراه المحطة المدارية.

في البداية كان الفيلمان متطابقين، ثم نلاحظ أن الفيلم الظاهري يتمدد لانهائيا مبيّنا رجل الفضاء مثبّتًا في وضعية التحية بصفة أزلية.

لقد صارت مدة التحية هنا غير منتهية.

اللانهايات الحقيقية للثقب الأسود

تجعل هذه اللانهايات المتعلقة بالأفق بعض الأحداث لا تقبل الرصد، ورغم ذلك فإن الفيزياء لا تواجه هنا أية مشكلة خاصة. إلا أن الوضع يتعقد عندما نهتم بباطن الثقب الأسود. ولعله من المفيد أن نوضح بأن الثقب الأسود

ظاهرة ديناميكية وليس كائنا ساكنا : يتعلق الأمر بانهيار تثاقلي لا يمكن لأحد إيقافه، ولا يمكن البقاء فيه ساكنا. فكل المسارات، مسارات الجسيمات المادية ومسارات الأشعة الضوئية، تؤول حتما إلى المركز. وبذلك يظهر هذا المركز كنقطة متميّزة، تسمى لدى الفيزيائيين نقطة متفردة من الزمضاء. المادة فيه والانحناء مضغوطان لانهائيا.

هناك معنى خاص لهذه النقطة المتفردة : إن تاريخ كل جسيم ينتهي عندها. نلاحظ أن هناك فترة زمنية منتهية تمرّ بين لحظة اختراق الأفق من قبل مركبة - أثناء سقوطها الحر - واللحظة التي تنهار فيها عند النقطة المتفردة المركزية.

إن مدة الحياة الممكنة داخل ثقب أسود - ذي كتلة تعادل مثلا عشر مرات كتلة الشمس - قبل الاندثار في النقطة المتفردة لا تتجاوز جزءا من مائة للثانية. وإذا تعلق الأمر بثقب أسود ضخم متستّر في كبد مجرّة من المجرات فمدة الاستكشاف قد تدوم ساعة. والملاحظ أن المنطقة المتفردة للثقب الأسود تظهر كحافة للزمضاء، شأنها شأن اللانهاية الفضائي. فهي تميّز حقًا نهاية الزمن وغياب المستقبل بالنسبة لكل مستكشف للثقب الأسود. تبدو هنا المفارقة مرتبطة بالطابع المنتهي - وليس اللامنتهي - للزمن !

وفي ذات الوقت يتم تحديد النقطة المتفردة بانحنائها غير المنتهي. إنها أول حالة يعرفها تاريخ الفيزياء يأخذ فيها مقدار فيزيائي – حقيقي وقابل للقياس – قيمة غير منتهية.

مُصَادرة اللانهاية

تساءل الفيزيائيون عما إذا كان بالإمكان تجنب هذه النقاط المتفردة، في إطار نظرية النسبية، حيث تكون عندها المقادير الفيزيائية غير منتهية، وبالتالي، غير قابلة للقياس. الجواب كان بالنفي : برهن ستيفن هاوكينغStephen Hawking وروجيه بنروز Roger Penrose في نهاية الستينيات من القرن العشرين على أن نظرية النسبية العامة تؤدي حتما إلى هذا التفرّد في سياق الانهيار التثاقلي. فالتفردات التثاقلية ليست إذن مجرد اصطناع رياضياتي. إنها جزء لا يتجزأ من النسبية العامة، ونتيجة حتمية لخاصية الجذب و"التسارع الذاتي" للتثاقل.

يؤدي كل انهيار تثاقلي لنجم ينتهي في نقطة متفردة إلى احتمالين، حسب تشكل أو عدم تشكل ثقب أسود. فإذا تشكل ثقب أسود سيخفي أفق الأحداث كل ما يجري في الباطن، بما في ذلك الاندثار النهائي المحتمل للمادة في موقع التفرّد. لقد "صادر" العلماء هذه الحالة. ذلك أن الفيزيائي الذي يعيش في الزمضاء الخارج عن الثقب الأسود لا يعنيه أمر التفرّد ولانهاياته، انتشرت أم لم تنتشر : فبسبب الأفق، لا شيء يصدر من باطن الثقب الأسود. إنه من الجائز ألا تُحترَم قوانين الطبيعة، وحتى قواعد الفطرة السليمة، والفيزيائيين عن ذلك غافلون ...

لكنه إذا تعلق الأمر بتشكل نقطة متفردة دون أن يخفيها أفق الثقب الأسود فتلك هي الكارثة. نقول عن النقطة المتفردة في هذه الحالة إنها "عارية". تستطيع عندئذ الجسيمات والإشارات الضوئية الهروب وقطع مسافات كبيرة وإلحاق أضرار فادحة بأي نظام فيزيائي، فتسقط مصداقية أي حساب وأي تنبؤ. ستكون هذه الوضعية خرابا لرجل العلم لأن القوانين الفيزيائية المعروفة

والتي تم اختبارها في المختبرات قد تتناقض بين عشية وضحاها بسبب سلوك النقطة المتفردة العارية ! وهل ينبغي الإشارة إلى أنه لم يسبق للعلميين مشاهدة التفرّدات العارية في الكون؟ لكن ذلك لا يعني أبدا أنها غير موجودة.

وحتى نتفادى مثل هذه الوضعيات المحرجة أتى روجيه بنروز بفرضية مصادرة كونية* تقول بأن الطبيعة تحرّم التفرّدات العارية : ينبغي على الأفق أن "يستر" كل تفرّد. لكن هذه المخمَّنة المحتشمة لم يكتمل برهانها في إطار نظرية النسبية. ويعتبر العلماء أنها فرضية سليمة في الوضعيات التي لا تبتعد كثيرا عن حالة التناظر الكروي، في حين يظل السؤال مطروحا في الوضعيات الأكثر تفرّدا.

إزالة اللانهاية

إنه لا يمكن حل كل "الوضعيات غير العادية" للتثاقل حتى لو كانت المصادرة الكونية للانهاية صحيحة. وهكذا يمكن أن توجد أنماط أخرى من التفرّدات، المختفية في أعماق الثقوب السوداء الدائرية الحركة، فتتولَّد عنها بعض التناقضات مثل الانتقال نحو عوالم أخرى أو السفر في الماضي. وبالتالي فالمشكل الحقيقي لا يكمن في معرفة ما إذا كانت التفردات التثاقلية تؤذي الاحتشام أم لا بل يكمن في معرفة ما إذا كانت تلك التفردات موجودة في الكون الحقيقي. وبعبارة أخرى، هل نظرية النسبية العامة التي تتنبأ بمثل تلك الوضعيات الخاصة باللانهايات هي دائما نظرية سليمة.

والجدير بالذكر أن العلم كثيرا ما ولّد نظريات فيزيائية تتضمن لانهايات. ثم تمت إزالة هذه اللانهايات باستكمال النظريات التي أصبحت بذلك تشمل مجال صلاحية أوسع. دعنا نوضح ذلك بالقول إنه بالرغم من أن نظرية النسبية العامة تعتبر في الوقت الراهن أفضل نظرية تعالج التثاقل فإنها لم تبلغ درجة الكمال لأنها لا تراعي مبادئ الفيزياء الكمومية. وتعتبر هذه الأخيرة

الركيزة الثانية للعلم الحديث، وهي تتحكم في تطور العالم المجهري، مثل الجسيمات الأولية الخاضعة للقوى النووية ذات المدى الضعيف جدا. وتوفر الفيزياء الكمومية وصفا "ضبابيا" للظواهر لأن نتائج القياسات لا يمكن تدقيقها إلا بلغة الاحتمالات. وهناك انعكاسات لتلك النتائج صدمت العقول، غير أن الفيزياء الكمومية أظهرت منذ ميلادها، في مطلع القرن العشرين، فعالية فائقة في وصف العالم الواقعي، كما أن نجاحاتها النظرية والتكنولوجية (الليزر، الترنزستر) لا تحصى. أما على الصعيد الفلكي فالتأثيرات الكمومية لا تؤدي أي دور، والفيزياء هي كما وردت في صيغتها "الكلاسيكية". ونجد في هذا السياق التثاقل الكلاسيكي الذي وصفته النسبية العامة يحتل مكانة مرموقة. وهذا على الرغم من أن ظاهرة العناصر المتفردة تبرِز اللامتناهي الصغر في النسبية. ذلك أنه يدخِل بنية الزمضاء في المستويات المجهرية، ومن ثمّ فهو يؤكد الاختلافات القائمة بين النظريتين. يمثّل طول بلانك (المساوي لـ 10^{-33} سم) أصغر بعد يمكن أن نعتبر فيه الزمضاء "أملس"، ويمكن أن نطبق من أجله الفيزياء الكلاسيكية ونظرية النسبية. وتحت هذا الطول فإن هناك تأثيرات كمومية، لا نلمّ بها، قادرة على تغيير حتى نسيج الزمضاء الذي قد لا يصبح متصلا، بل يصير متقطعا في شكل حبيبات، مثل المادة والطاقة.

يمكننا في هذه الحالة تفسير هذا السلّم (لصاحبه بلانك) كـ "أفق مجهري" يتجاهل اللانهايات التثاقلية للتفرّدات. وبطبيعة الحال فهذا الوضع ليس مرْضيا تماما لأن هذا الأفق يمثل في الواقع أفق جهلنا! ومن ثمّ نستطيع صياغة متطلبات نظرية جديدة، كإزالة "اللانهايات" التثاقلية بصفة نهائية. وعند دفع هذا الثمن ستصون الفيزياء رشدها. غير أن البعض قد يصيحون، وهم محقون في دعواهم : لِنَحذرْ من صواب العقل!

أبرز المفاهيم

إعادة المُناظَمة renormalisation : مصطلح يرد في فيزياء الجسيمات، وهو طريقة رياضياتية تسمح بإزالة اللانهايات التي تظهر في بعض الحسابات. مثال ذلك : تمكّن هذه الكيفية من حساب الكتلة المنتهية للإلكترون انطلاقا من إزالة كتلتين غير منتهيتين.

الإلكترون : جسيم يحمل شحنة كهربائية أولية سالبة. يمكن أن يكون الإلكترون حرا أو مرتبطا بالذرات والجزيئات. أما كتلته فهي تعادل $\frac{1}{1836}$ كتلة البروتون.

الانفجار الأعظم : هو نموذج لتطور الكون، مقبول في الوقت الراهن، ينص على أن الكون كان قبل حوالي 15 مليار سنة قد دخل في طور توسعي انطلاقا من حالة شديدة الحرارة والكثافة. وغالبا ما يستعمل هذا المصطلح لوصف "نشأة انفجارية" للكون.

الأوتار الرفيعة : انظر نظرية الأوتار.

البروتون : جسيم يحمل شحنة كهربائية أولية موجبة تشكل، مع النترونات غير المشحونة، النوى الذرّية. ويتشكل البروتون من ثلاثة كواركات quark.

البوزترون : جسيم مضاد للإلكترون، شحنته الكهربائية موجبة.

التثاقل : هو حقل تفاعل جاذبي ذو بعد غير منته تخضع إليه كافة الأجسام في الكون. والتثاقل صار اليوم معرّفا بوضوح من خلال نظرية النسبية العامة.

التثاقل الكمومي : نظرية تسعى إلى دمج مفعول الميكانيكا الكمومي في وصف التفاعل التثاقلي.

تعدد الترابط : انظر طبولوجيا.

الثابت الكوني : مصطلح أدخله آينشتاين في معادلات النسبية العامة، لكننا نجهل أهميته الفيزيائية. ويمكن تفسيره على أنه تفاعل طارد على المستوى الكوني. وفي أغلب الأحيان نفترض أنه منعدم. وفي كل الأحوال، فهو ثابت صغير جدا، لكنه قادر على أن يؤدي دورا أساسيا في التطور الكوني.

الجاذبية الكونية : نظرية أتى بها نيوتن تصف القوة الجاذبة للتثاقل التي تؤثر في كل جسيمات الكون : كل جسمين يتجاذبان عبر قوة متناسبة طردا مع كتلتيهما ومتناسبة عكسيا مع مربع المسافة التي تفصلهما.

الجسم الأسود : هو نموذج مثالي لكل كائن يُصدر ويستقبل إشعاعات كهرومغنطيسية، كالفرن المنعزل انعزالا تاما وفيه ثقب صغير تنفلت منه إشعاعات. يتميّز الجسم الأسود بدرجته الحرارية. أما الجسم الأسود الكوني فهو الإشعاع الصادر من الكون البدائي الذي يصل إلينا بعد أن برّده التوسّع فجعله حثالةً مائعة ومنتظمة بدرجة حرارة $2.7K$.

الجُسيْم : لفظ شامل يدل على مكوّن أساسي للمادة. هناك ثلاث مجموعات من الجسيمات : الفوتونات، واللبتونات lepton والكواركات. تعتبر الإلكترونات مثالا للبتونات.

الخلاء (الفراغ) الكمومى : هو الحالة التى تكون فيها الطاقة أصغرية. يحتوي

الخلاء الكمومي على حقول طاقة "افتراضية" يمكن أن تظهر، إثر تقلبات، في شكل جسيمات يمكن مشاهدتها. هناك نظريات كونية حديثة تقول بأن الكون وُلِد انطلاقا من الخلاء الكمومي.

دُوَيْرَات فوقية epicycles : هي منحنيات ترسمها نقطة مثبتة على دائرة عندما تتدحرج هذه الأخيرة على دائرة أخرى. حاول الفلكيون الإغريق شرح مسارات الكواكب حول الأرض بنظام دويرات فوقية. وكان كوبرنيكوس لا يزال يستعمل الدويرات الفوقية في نظامه المتمركز في الشمس. وقد وضع كبلر حدًا لنظرية الدويرات الفوقية باكتشاف قوانين الحركة البيضوية.

الديناميكا : فرع الميكانيكا الذي يدرس العلاقات بين القوى المؤثرة على الأجسام وحركاتها.

الذرّية : مذهب يرجع تاريخه إلى عهد اليونان القديم، اقترحه ديموقريط، وهو يقول بوجود ذرات، أي قطع لا تتجزأ من المادة (المقابل اليوناني للفظ الذرة هو أتوموس atomos = لا يتجزّأ). تعتبر الذرات العناصر الأولية للكون. والعنصر الأولي الآخر هو الخلاء الممتد إلى لانهاية.

زحزحة المجرات نحو الأحمر : استطالة ظاهرية لطول موجة الإشعاع الصادر عن المجرات البعيدة، وهذا يعود إلى حركتها التراجعية. إنها استطالة ناتجة من مفعول عام جدا يدعى "مفعول دوبلر Doppler" : عندما يتحرّك مصدر إشعاع بالنسبة للمشاهد فإن الطول الظاهري لموجة الإشعاع يزداد ("نحو الأحمر") عند ابتعاد المصدر، ويتناقص ("نحو الأزرق") لدى اقتراب المصدر. ونجد هذا المفعول أيضا فى الأمواج الصوتية عند انطلاق صفارة سيارات الشرطة، فيكون

صوتها حادا عند اقترابها وخفيضًا عند ابتعادها.

السديم الحلزوني : مجرة ذات شكل حلزوني، أشهرها مجرة "المرأة المسلسلة" (أندروميدا) التي تبعد عنا مسافة مليونيْ سنة ضوئية. لم يكن المرقاب (التلسكوب) في بداية القرن العشرين عالي الجودة كما هو الحال اليوم، ولذا كانت بنية المجرات تبدو في شكل ضبابي، أي "سديم".

الطارة : في حالة بعدين، الطارة هي سطح مولّد بدائرة تدور حول مستقيم لا يتقاطع معها (مثل الطارة الهوائية في العجلة). لهذه الطارة بالذات انحناء. غير أن هناك طارات أخرى بدون انحناء، مثل تلك المحصل عليها بلصق الأضلاع المتقابلة في مستطيل. و"الطارة الفوقية" هي تعميم إلى الأبعاد الثلاثة للطارة ذات البعدين. تمثّل الطارة الفوقية التي ننشئها بلصق الوجوه المتقابلة مثنى مثنى في متوازي المستطيلات فضاء أقليديا مغلقا على ذاته. لو كان الفضاء الحقيقي طارة فوقية لتضاعفت صور أبعد المجرات كما يحدث عند تعدّد المرايا.

الطارة الفوقية : انظر الطارة.

الطبولوجيا : حقل رياضياتي واسع يتناول مسائل الاستمرار (الاتصال). وتُعْنى الطبولوجيا، بوجه خاص، بالخواص الشاملة للفضاءات التي لا تعير وزنا للتشوهات المستمرة (المتصلة)، مثل طابعها المنتهي وغير المنتهي وعدد ثقوبها، الخ. نقول عن فضاء بدون ثقوب، مثل المستوي الأقليدي أو سطح الكرة، إنه بسيط الترابط. و إن كان الأمر عكس ذلك قلنا إنه متعدد الترابط.

الطيف : مجموعة مستمرة من الأمواج الكهرومغنطيسية المرتبة وفق تردداتها أو وفق أطوالها. ومن المألوف فى علم الفلك أن نقسم الطيف إلى أشرطة :

الراديوية، تحت الحمراء، المرئية، فوق البنفسجية، الأشعة السينية والأشعة غاما (مرتبة حسب الترددات، من المنخفض إلى المرتفع).

العلم الإيجابي : مذهب فلسفي ظهر خلال القرن التاسع عشر يقول بأن المعرفة لا تأتي إلا من خلال المشاهدة والتجربة.

علم الحركة : فرع من الميكانيكا يدرس هندسة حركات الأجسام المادية دون الانشغال بالأسباب (القوى) التي تقف وراء تلك الحركات.

علم الكون (**الكسمولوجيا**) : هي دراسة مجمل الكون، سيما بنيته ونشأته وتطوره ومصيره. ولما كانت المشاهدات لا تبلغ سوى جزء من الكون فإن النظريات الكونية تؤدي إلى تصورات خاصة بالفضاء والزمن تكون دائما محلّ نقاشات حادة ومثيرة ...

علم الكون الكمومي : ينتج علم الكون الكمومي من تطبيق مبادئ الميكانيكا الكمومي على وصف مجمل الكون. وهو يحاول الإجابة بطريقة علمية على قضايا الأصول (من أين أتينا؟) وقضايا الوجود بعد العدم (لماذا وجد هذا الشيء أو ذاك بدل عدمه؟).

علم الكون النسبي : هو مجموعة من النماذج الكونية المحصل عليها انطلاقا من حلول معادلات النسبية العامة. وفي الوقت الراهن، تعتبر هذه الأخيرة أفضل نظرية تتناول التثاقل، ولذا فإن كل نماذج الكون المستساغة (سيما نماذج الانفجار الأعظم) تنطلق من النسبية.

عهد بلانك Planck : هو عهد قبَيْل بدء الكون (قبل البدء بـ 10^{-43} ثانية).

وخلال هذا العهد كانت التأثيرات الكمومية على الفضاء والزمن مهيمنة. يعتبر عهد بلانك الحد الفاصل لصلاحية نظرية النسبية العامة ... وهو يشير إلى فكرة "الانفجار الأعظم" بوصف الحدث بداية انفجارية للكون.

الفضاء الأقليدي : هو فضاء هندسته معرّفة بمسلمات أقليدس (سيما الخاصية القائلة إن هناك مستقيما وحيدا يوازي مستقيما معطى ويشمل نقطة معلومة لا تقع على المستقيم المعطى). والنموذج المألوف للفضاء الأقليدي الثنائي البعد هو المستوي. أما الفضاء الأقليدي الثلاثي الأبعاد فيبدو أنه الفضاء الذي نطلق فيه العنان لأحاسيسنا، ولذا اعتبر خلال مدة طويلة بأنه الفضاء "الحقيقي". يمكن أن يكون فضاء أقليدي منتهيا أو غير منته.

الفضاء الفائق : فضاء مجرّد أبعاده غير منتهية، يستعمل في علم الكون الكمومي. ترمز كل نقطة من الفضاء الفائق إلى وضع محتمل للفضاء وللمادة في الكون.

الفضاء الكروي : هو فضاء غير أقليدي انحناؤه موجب. النموذج المألوف، في حالة بعدين، هو سطح كرة. الفضاء الكروي فضاء منته دوما.

الفضاء اللوبتشفسكي (أو الزائدي) : هو فضاء غير أقليدي، انحناؤه سالب، وهندسته معرّفة بمسلمات لوبتشفسكي. والنموذج المألوف في حالة بعدين هو المجسم الزائدي أو بعض أجزاء سرج الحصان. يمكن أن يكون فضاء زائديًا منتهيا أو غير منته.

الفوتون : جسيم أولي للإشعاع الكهرومغنطيسي. كتلته عند السكون منعدمة، لكنها لا تكون أبدا في حالة سكون لأنها تتنقل بسرعة الضوء!

الكسوري (الفركتال) : بنية هندسية لها تشابه أو تطابق في الشكل، وذلك رغم شدة تعرجاتها مهما كان السلم الذي ننظر إليها من خلاله.

الكموم quantum : كمية لا تتجزأ من مقدار فيزيائي لا تخضع سوى لتغيرات متقطعة تساوي عددا صحيحا من الكمومات. فعلى سبيل المثال، تعتبر شحنة الإلكترون كموم الشحنة الكهربائية، كما يعتبر الفوتون كموم الطاقة للحقل الكهرومغنطيسي.

الكواركات quark : مكوّنات أساسية للبروتونات والنترونات، وكذا لجسيمات أولية أخرى. وتتوزع الكواركات إلى ستة أنواع مختلفة.

الكويْكب : هو جسم صخري صغير يدور حول الشمس. هناك عشرات آلاف الكويكبات، معظمها متجمعة في مدارات حول المريخ والمشتري. أما كبرها فيتراوح ما بين بضع مئات الأمتار وعشرات الكلمترات.

اللامتناهيات : مفهوم أعدّ خلال القرنين السابع عشر والثامن عشر بهدف حلّ مسائل الميكانيكا المتعلقة بالمقادير الصغيرة جدا. وقد سمحت نظرية اللامتناهيات - التي تتأرجح بين الرياضيات والفيزياء - بوضع الحساب اللامتناهي وإجراء عمليات منسجمة حول اللامتناهيات في الصغر.

اللانهايات الأصلية : أصلي (أو عدّة) مجموعة هو عدد عناصرها. قد يكون هذا العدد غير منته. وعلى سبيل المثال، فذلك حال مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة الأعداد الحقيقية. ولما كان أصلا هاتين المجموعتين مختلفين فإننا نستنتج وجود الكثير من اللانهايات الأصلية.

مبدأ علم الكون (الكسمولوجيا) : فكرة تقول إن كل المشاهدين يدركون الكون بنفس الطريقة مهما كانت مواقعهم في الفضاء. ونحن نضيف صفة "الكمال"، عندما نفترض زيادة على ذلك، بأن خواص الكون لا تتغير بتغير الزمن (وهذا يتناقض مع التجربة).

تساوي الحركة équant : مفهوم فلكي أدخله بطليموس حوالي سنة 130. ذلك أن نظرية الدُوَيْريات الفوقية لا تكفي لتفسير التغيّر الدوري للمعان كوكبيْ المريخ والمشتري. كان بطليموس قد افترض أن الكواكب تجري على مداراتها بسرع متغيرة، لكن حركتها الزاوية ثابتة بالنسبة لنقطة معينة مرتبطة بـ "التساوي" : ذلك هو "المتساوي الحركة".

المجرّة : هي تجمّع لملايير النجوم والمادة المنتشرة بين تلك النجوم (غازات وأغبرة)، والكل يخضع لقانون التثاقل ويمتد إلى حوالي مائة ألف سنة ضوئية. أما اسم مجرتنا فهو درب التبانة. والكون المرئي يضم ملايير المجرات.

المركزية الشمسية héliocentrisme : مذهب يرى بأن الشمس تقع في مركز نظام الكواكب خلافا للنظرة "المركزية الأرضية" التي ترى بأن الأرض هي التي تقع في ذلك المركز. وقد جاء بهذا المذهب أرسطارك الساموسي Aristarque de Samos خلال القرن الثالث قبل الميلاد، ثم كوبرنيكوس في القرن السادس عشر. لكن المذهب لم يفرض نفسه إلا في القرن السابع عشر إثر ظهور أعمال غاليليو وكبلر.

المِسبار الكوني : جهاز رصدي قوي جدا يسمح، عبر اكتشاف أبعد النجوم مثل أشباه النجوم (الكوازارات) quasar، بـ "سبر" تخوم الكون التي يمكن مشاهدتها.

المُسَلَّمَة : قضية رياضياتية نسلّم بها دون برهان، وهي تستخدم كمنطلق لسلسلة من الاستدلالات. ويتكوّن كل نظام منطقي منسجم من مجموعة مسلمات مستقلة. وتنشأ النظريات الرياضياتية بناء على تلك الأنظمة (مثل نظرية المجموعات، أو الهندسة الأقليدية). هناك أيضا مسلمات في الفيزياء، أي نصوص واضحة الصياغة ومستقلة تُبنَى عليها نظرية فيزيائية بناء منطقيا.

المصادرة الكونية : فرضية تقدم بها الفيزيائي روجيه بنروز Penrose تنصّ على أن كل تفرّد للكون ينبغي أن يكون مخفيا وراء "أفق" (مثل قاع ثقب أسود) حتى لا تؤثر في الفضاء الخارجي (والتفرّدات هي "عُقَد" الزمضاء غير المنتهي الانحناء، تكون فيها كل قوانين الفيزياء غير صالحة). الملاحظ أن هذه المخمنة لم يتم البرهان عليها إلى اليوم في سياق النسبية العامة. وفي حالة عدم صحتها فإنه توجد تفردات "عارية" يؤدي سلوكها إلى استحالة القيام بأي توقع فيزيائي. ولِمَاذا لا نتصور أن النسبية العامة أخطأت عندما توقعت وجود تفردات ... وإن كان الأمر كذلك فسوف لن نحتاج إلى مصادرة!

الميكانيكا : فرع فيزيائي يُعْنى بحساب حركات نظام الأجسام انطلاقا من معرفة القوى الخاضعة لها. كما يُعْنى بالقضية العكسية، أي بتعيين القوى المؤثرة لدى معرفة الحركة ومواقع الأجسام. ومن المعلوم أن ميكانيكا نيوتن (بالمعنى الكلاسيكي) يكون صالحا عندما يتعلق الأمر بسرعة منخفضة جدا مقارنة بسرعة الضوء. وفي ما عدا ذلك ينبغي استخدام الميكانيكا النسبي. أما في المجال الذري وتحت الذري فهناك قوانين جديدة ينبغي مراعاتها : إنها قوانين الميكانيكا الكمومي.

النجم (فوق) الجديد (سوبرنوفا) Supernova : انفجار شديد لنجم كثيف ينشر

جزءا من مادته في الفضاء تاركا في مركزه نجما كثيفا من نمط النجم النتروني أو الثقب الأسود. يوفر النجم الجديد لمعانا يعادل لمعان ملايين النجوم، ثمّ ينطفئ بعد عدة شهور.

نسبية السلَّم : نظرية طوّرها لورنت نوتال Nottale، ولا زال العمل في إعدادها جاريًا. وهي تفترض أن القوانين الفيزيائية تظل على حالها ليس بالنسبة للمشاهدين المتحركين فحسب، بل أيضا بالنسبة للذين يشاهدون الكائنات بعد عملية "تكبير". ويترتّب عن هذه النظرية ضرورة إعادة النظر في مفهوم الفضاء والزمن والمسارات بتعبير كسوري (فركتالي).

النسبية العامة : نظرية جاء بها آينشتاين عام 1915، أدخل فيها مفهوم "الزمضاء المنحني" لوصف التثاقل. وهكذا لم يعد التثاقل قوة كما افترض نيوتن، بل صار تجليًا للهندسة المنحنية للزمضاء.

نظرية الأوتار : نسمي "وترا" كل كائن مستطيل نتخيّله في فيزياء الجسيمات كي نفسر من خلاله الروابط القائمة بين الكواركات والكواركات المضادة. تفترض نظرية الأوتار - التي تعتبر نظرية واسعة موحّدة للتفاعلات الأساسية - أن العناصر الأخيرة للمادة أوتار مهتزة طولها 10^{-33} سم.

النظرية الكمومية : شكلانية تأسست في مطلع القرن العشرين لفهم ووصف الظواهر تحت الذرية. تعتمد النظرية الكمومية بوجه خاص على المظهر الثنائي "الموجة-جسيم المادة"، وعلى مبدإ الارتياب القائل باستحالة قياس موقع وسرعة الجسيم في آن واحد، وعلى مبادئ أخرى تطرح تأويلاتها أحيانا بعض الإشكاليات. ومع ذلك فإن لهذه النظرية قوة وصف وتنبؤ كبيرين، وتتدخل

اليوم في كل فروع الفيزياء المعاصرة باستثناء التثاقل.

نظرية المجموعات : فرع من المنطق الرياضياتي يتناول العلاقات بين كائنات رياضياتية مجمّعة في أصناف وفئات، الخ.

الهندسة غير الأقليدية : مجموعة قوانين تصف خواص الفضاءات "المنحنية" التي لا تخضع لمسلمات الهندسة الأقليدية. وعلى سبيل المثال، فالهندسة الكروية والهندسة الزائدية هندستان غير أقليديتين.

إعلان عن جائزة اللغة العربية 2012

يعلن المجلس الأعلى للغة العربية عن تنظيم "جائزة اللغة العربية لسنة 2012 الهادفة إلى تشجيع الباحثين والمبدعين وتثمين منجزاتهم العلمية والمعرفية، ذات المردود النوعي لإثراء اللغة العربية، والإسهام في نشرها وترقيتها، سواء كانت هذه الأعمال مؤلفة باللغة العربية، أم مترجمة إليها/

1- شروط الترشح للجائزة :

- أن يقدم العمل باللغة العربية
- أن يتوفر العمل على قواعد المنهجية العلمية
- أن يكون البحث موثقا وأصيلا، ولم يسبق نشره،

وفي مجال الترجمة ترفق نسخة للنص بلغته الأصلية

- أن لا يكون قد نال به صاحبه جائزة أو شهادة علمية
- أن يندرج البحث في أحد المجالات المذكورة أدناه.
- قرارات لجنة التحكيم غير قابلة للطعن
- لا ترد الأعمال إلى أصحابها سواء فازت أم لم تفز.

2- حدد مبلغ الجائزة بـــ 1.000.000 دج، يوزع بمقدار 250.000 دج لكل مجال من المجالات الأربعة التالية :

- جائزة المجلس في علوم اللغة العربية

- جائزة المجلس في الترجمة إلى العربية في العلوم والآداب
- جائزة المجلس في العلوم الاقتصادية
- جائزة المجلس في التاريخ الوطني

حدد مبلغ الجائزة للفائز الأول بـــ 160.000 دج ومبلغ الفائز الثاني بـــ 90.000 دج في كل مجال من المجالات الأربعة المذكورة أعلاه.

يمكن أن يتكفل المجلس بنشر الأعمال الفائزة، وتصبح ملكا له، إلا أنه يمكن للفائز بالجائزة استعادة حقوقه حسب دفتر الشروط، وبعد انقضاء مدة ثلاث سنوات ـ على الأقل ـ من نشر العمل.

تعرض الأعمال المرشحة على لجنة تحكيم مكونة من ذوي الاختصاص، الذين لا يسمح لهم بالمشاركة في الجائزة،

3- طلب الترشح :

يتكون طلب الترشح للمسابقة من الوثائق الآتية :

- طلب خطي
- نسخة من وثيقة الهوية (بطاقة التعريف أو رخصة السياقة)
- السيرة العلمية للمشارك
- نسختين من البحث المقدم لنيل الجائزة :
- النسخة الأولى مسجلة على قرص والنسخة الثانية توجه عن طريق البريد المسجل، ويكون تاريخ الختم البريدي شاهدا على ذلك.

4- يفتح باب الترشح للجائزة ابتداء من نشر هذا الإعلان في وسائل الإعلام إلى غاية 31 ديسمبر 2011.

5- يوجه ملف الترشح إلى العنوان الآتي :

السيد رئيس المجلس الأعلى للغة العربية

شارع فرانكلين روزفلت، الجزائر

أو

ص.ب : 575، شارع ديدوش مراد الجزائر العاصمة

جائزة اللغة العربية

الفهرس

طبع هذا الكتاب بـ:

دار الخلدونية للطباعة والنشر والتوزيع

05، شارع محمد مسعودي القبة القديمة ـ الجزائر

الهاتف: 021.68.86.49 الفاكس:021.68.86.48

البريد الإلكتروني : khaldou99_ed@yahoo.fr



اللانهاية في الرياضيات والفيزياء ترجمة أ.د. أبو بكر خالد سعد الله :



جاء العمل في مائة وستين (160) صفحة، من قسمين:
القسم الأول حول ترجمة لكتاب «اللانهاية في الرياضيات» للمؤلف نوربرت فيردي Norbert Verdier، متطرقا إلى:
-اللانهاية عند الإغريق. نحو نظرية اللامتناهي الصغر نظرية رياضياتية اللانهاية.
القسم الثاني حول ترجمة القسم الأول لكتاب «الفيزياء واللانهاية» للمؤلفين: جون لوميني J.P.Luminet ومارك لاشيز-ري M. Lachieze-Rey متطرقا إلى:
- لانهاية السماء. لانهاية المادة. لانهاية الثقب.
للكتاب أهمية في إثراء اللغة العربية بمصطلحات ومدلولات تساعد القائمين على التربية والتعليم في الاستفادة من هذا العمل العلمي.

ISBN: 978-9947-821-53-4





المجلس الأعلى للغة العربية
شارع فرنكلين روزفلت- الجزائر
الهاتف: 213.021.23.07.24/25 الفاكس : 213.021.23.07.07
ص.ب : 575 الجزائر - ديدوش مراد
www.csla.dz